Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien die offene Teilmengen $U_\pm := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p)^4 \pm 2x(p)^2 \pm 2y(p)^2 + y(p)^4 < 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ horizontal geblättert. Das heisst, die Blätter sind die Zusammenhangskomponenten der Durchschnitte von $U_\pm$ mit den Niveaus der Funktion y. Zeige, dass kein blätterungserhaltender Homöomorphismus von U_- nach U_+ existiert.

Aufgabe 2. Seien die offenen Teilmengen $D := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p)^2 + y(p)^2 < 1\}$, $R := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |x(p)| + |y(p)| < 1\}$ und $Q := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |x(p)| < 1, |y(p)| < 1\}$ horizontal geblättert. Zeige, dass paarweise die geblätterten Mengen D, R, Q unter blätterungserhaltenden Diffeomorphismen zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 3. Gibt es einen blätterungserhaltenden Homöomorphismus $f : Q \to R$, der gleichmässig stetig ist? Gibt es einen blätterungserhaltenden Homöomorphismus $f : R \to Q$, der gleichmässig stetig ist?

Aufgabe 4. Sei $D_a := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid a * x(p)^2 + y(p)^2/a < 1\}, a \in \mathbb{R}, a > 0$. Sei $f : D_a \to D_1$ ein Homöomorphismus, so dass f jeden Durchschnitt von D_a mit einer Gerade in $\mathbb{R}^2$ auf den Durchschnitt von D_1 mit einer Gerade in $\mathbb{R}^2$ abbildet. Ist f notgedrungen die Einschränkung eines linearen Automorphismus von R^2?

Aufgabe 5. Bezeichne T den Torus $T := S^1 \times S^1$. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to T$ heisst transversal zu einer Blätterung β auf T, wenn $\dot\gamma(t)$ nicht tangent am Blatt von β durch $\gamma(t), t \in [0,1]$, ist. Konstruiere eine Blätterung β auf T derart, dass es zwei Punkte $p, q \in T$ gibt, die nicht mit einer Kurve transversal zu β verbunden sind.