Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $P := \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ ein homogener Differentialoperator zweiter Ordnung, wobei $a_{i,j} : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf den Ball $D := \{p \in \mathbb{R}^n \mid ||p||_{Eukl} \le 1\}$ sind. Wir nehmen an, dass $a_{i,j} = a_{j,i}$ gilt, und dass für $p \in D \setminus \partial D$ die Matrix $(a_{i,j}(p)$ definit ist. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $D \setminus \partial D$ zweimal differenzierbar ist und die $Pf = 0$ auf $D \setminus \partial D$ und $f = 0$ auf ∂D erfüllt. Zeige $f = 0$ auf D. Hinweis: es existieren beliebig kleine Linearformen $L \in (\mathbb{R}^n)^*$ so dass $f + L$ eine Morsefunktion auf $D \setminus \partial D$ ist. Führe die Annahme $f \neq 0$ zum Widerspruch mit $P(f + L)(p) = 0$, wobei $f + L$ Morsefunktion ist, $|\max_D L| < \max_D |f|$ gilt und $p \in D \setminus \partial D$ ein Maximum oder Minimum von $f + L$ ist.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht konstantes Polynom. Zeige, dass f holomorph ist. Zeige, dass die Funktionen Realteil $\Re(f)$ und Imaginärteil $\Im(f)$ harmonisch sind.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Seien $G_\mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$ und $G_{i\mathbb{R}} := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$. Sei $K_f := \{z \in \mathbb{C} \mid df_z = 0\}$. Zeige, dass $G_\mathbb{R}$ und $G_{i\mathbb{R}}$ Graphen mit den Ecken in K_f und mit differenzierbaren Kantenzügen sind. Ist $G_\mathbb{R}$ oder $G_{i\mathbb{R}}$ eine beschränkte Teilmenge in $\mathbb{C}$? Kann $G_\mathbb{R}$ oder $G_{i\mathbb{R}}$ eine beschränkte Zusammenhangskomponente haben? Bestimme $G_\mathbb{R} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ und $G_{i\mathbb{R}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ für $r > 0$ und gross.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Zeige, dass in jeder Ecke von $G_\mathbb{R}$ oder $G_{i\mathbb{R}}$ gerade viele Kanten anstossen.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Zeige, dass $G_\mathbb{R}$ und $G_{i\mathbb{R}}$ keine Zykeln haben.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Zeige, dass $G_\mathbb{R}$ und $G_{i\mathbb{R}}$ sich schneiden. Schliesse, dass f in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle hat und beweise somit den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijektiv und stetig. Zeige, dass die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijektiv und differenzierbar. Ist die Umkehrabbildung f^{-1} differenzierbar?

Aufgabe 9. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijektiv und holomorph. Ist die Umkehrabbildung f^{-1} holomorph?