Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei E_n der n-dimensionale Euklidische Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$. Wir bezeichnen mit B die Einheitskugel und mit H das Innere von B. Für $a \in E_n \setminus \{0\}$ sei s_a die Spiegelung $u \in E_n \mapsto u - \frac{1}{||a||}\langle u, a\rangle a$. Für $a \in E_n \setminus B$ sei i_a die Inversion an der Sphäre mit Zentrum a und Radius $\sqrt{||a||^2 - 1}$. Für $u \in E_n, u \neq a$ gilt $i_a(u) = a + \frac{||a||^2-1}{||u-a||}(u - a)$. Sei τ_a die die Einschränkung der Zusammensetzung $i_a \circ s_a$ auf H. Zeige für $a \in E_n \setminus B$, dass $\tau_a(H) = H$ und $\tau_a(B) = B$ gelten. Zeige, dass für $a \in E_n \setminus B$ und $p \in H$ das Differential von τ_a eine direkte Ähnlichkeit ist.

Aufgabe 2. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf H. Zeige das Maximumsprinzip, d.h. zeige $\max\{f(u) \mid u \in B\} = \max\{f(u) \mid u \in \partial B\}$. Hinweis: Man kann $L : E_n \to \mathbb{R}$ linear und beliebig klein wählen, derart dass $f + L$ auf H eine Morsefunktion ist.

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Sei $f : B \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf H. Zeige für $a \in E_n \setminus B$, dass $f \circ \tau_a$ harmonisch ist.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Sei $\epsilon \mapsto \delta(\epsilon)$ ein Stetigkeitsmodulus für f. Zeige, dass für $a \in E_n \setminus B$ die Funktionen $f_a := \frac{1}{2}(f + f \circ s_a)$ und f gleichen Stetigkeitsmodulus $\epsilon \mapsto \delta(\epsilon)$ und gleichen Wert in 0 haben. Zeige, dass f_a auf H harmonisch ist. Die Funktion f_a hat die Symmetrie $f_a \circ s_a = f_a$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Zeige, dass es eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in ∂B gibt, derart dass die Funktionsfolge

$$f, f_{a_0}, f_{a_0,a_1}, f_{a_0,a_1,a_2}, \cdots$$

gleichmässig gegen eine konstante Funktion auf B konvergiert. Hinweis: Zeige zuerst, dass die Einschränkungen auf ∂B konvergieren.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Zeige für f die Mittelwerteigenschaft:

$$f(0) = \mathrm{MW}_{\partial B}(f) := \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B)} \int_{\partial B} f(u) dVol_{\partial B}(u).$$

Aufgabe 7. (Fortsetzung) Für $u \in H$ bestimme $a = a(u) \in E_n \setminus B$ derart, dass $\tau_a(0) = u$ gilt. Schliesse: $f(u) = \mathrm{MW}_{\partial B}(f \circ \tau_{a(u)})$.

Aufgabe 8. (Fortsetzung) Finde eine Integralformel für $f(u)$.

Aufgabe 9. Beweise noch einmal das Maximumsprinzip für harmonische Funktionen.