Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge. Sei $|| \, ||_{\mathbb{R}^n}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und sei $|| \, ||_{OpN}$ die duale Operatornorm auf dem Raum der Linearformen von $\mathbb{R}^n$. Sei $C^1(U)$ der Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$||f||_{C^1} := \sup_{p \in U} |f(p)| + \sup_{p \in U} ||(Df)_p||_{OpN}$$

eine reelle Zahl ist. Zeige, dass $|| \, ||_{C^1}$ eine Norm auf $C^1(U)$ ist. Zeige, dass $C^1(U)$ mit der Norm $|| \, ||_{C^1}$ einen Banachraum bildet.

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Zeige, dass die Inklusion $i : C^1(U) \to C^0(U)$ kompakt ist. ($C^0(U)$ ist der Banachraum aller stetigen Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Norm $||f||_{C^0} := \sup_{p \in U} |f|$ eine reelle Zahl ist. Die stetige und lineare Abbildung $i : C^1(U) \to C^0(U)$ heisst kompakt, wenn in $C^0(U)$ das Bild $i(A)$ einer beschränkten Teilmenge A von $C^1(U)$ in $C^0(U)$ einen kompakten Abschluss hat.)

Aufgabe 3. Seien U, U' beschränkte offene Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, derart dass der Abschluss $\bar{U}$ von U in $\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge von U' ist. Sei $A \subset C^0(U')$ eine beschränkte Menge von harmonischen Funktionen. Sei B die Menge der Einschränkungen der Funktionen in A auf U. Zeige, dass der Abschluss von B in $C^2(U)$ kompakt ist.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, d.h., f ist differenzierbar und für $p \in U$ ist das Differential $(Df)_P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear. Sei $\omega = \Re(f dz)$ auf U die 1-Differentialform $\omega_p(v) := \Re(f(p)v), p \in U, v \in \mathbb{C}$. Zeige $d\omega = 0$.

Aufgabe 5. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$?

Aufgabe 6. Auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist die Funktion $f(z) := \frac{\bar{z}}{1-z}$ differenzierbar. Das Differential df schreibt sich als Linearkombination

$$df = a dz + b d\bar{z},$$

wobei a und b Funktionen sind.

Berechne $d'f := a dz$ und $d''f = b d\bar{z}$. Berechne $d' \exp(|z|^2)$.

Aufgabe 7. Zeige, dass auf $U := \{p \in \mathbb{C}^d \mid |z_i(p)| < 1, i = 1, \cdots, d\}$ die Reihensumme

$$f(p) := \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \max\{n_i, i = 1, \cdots, d\} z_1(p)^{n_1} z_2(p)^{n_2} \cdot \cdots \cdot z_d(p)^{n_d}$$

eine holomorphe Funktion f definiert.

Aufgabe 8. (Fortsetzung) Berechne f für $d = 1, 2, \ldots,$ als rationale Funktion, d.h. als $f(p) = \frac{P(z(p))}{Q(z(p))}$ wobei P und Q Polynome sind.

Aufgabe 9. Sei für $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, die Funktion $q(z)$ durch $q(z) := 2 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$ gegeben. Zeige, dass die Funktion $q(z)^2 - \frac{15}{4}$ sich für $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, als Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ darstellen lässt. Zeige

$$4a_n = \#\{i, j \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i^2 + j^2 = n\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}, n > 1$, sei

$$g_{\pm}(n) := \#\{k \in \mathbb{N} \mid 4k \pm 1 > 0 \text{ und } 4k \pm 1 | n\}.$$

Es gilt für $n \in \mathbb{N}, n > 0$, der berühmte Satz von Adrien-Marie Le Gendre (geb. am 18. September 1752 in Paris, gest. am 10. Januar 1833 in Paris)

$$4a_n = \#\{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i^2 + j^2 = n\} = 4(g_+(n) - g_-(n)).$$

Die folgende Frage hat über Jahrtausende die Mathematik geprägt: “Welche ganzen Zahlen lassen sich als Summe von zwei ganzen Quadraten darstellen und wieviele solche Darstellungen gibt es?”