Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Zeige, dass mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

auf U holomorphe Funktionen f und g erklärt werden.

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Eine zusammenhängende offene Teilmenge U in $\mathbb{C}$ heisst *Holomorphiebereich in* $\mathbb{C}$ einer holomorphen Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ wenn keine holomorphe Funktion $k : U' \to \mathbb{C}$ mit $U \subset U', U \neq U'$ existiert, derart dass die Einschränkung von k auf U mit h übereinstimmt und U' zusammenhängend ist. Zeige, dass $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ Holomorphiebereich in $\mathbb{C}$ für g aber nicht für f ist.

Aufgabe 3. Sei U eine zusammenhängende offene Teilmenge in $\mathbb{C}$. Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, deren Einschränkungen auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $U'' \subset U$ übereinstimmen. Zeige: $f = g$.

Aufgabe 4. Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |1 - z| < 1\}$ und sei $w : U \to \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion, gegeben durch

$$w(z) = 1 + \frac{z-1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} (z-1)^n.$$

Zeige: $w(z)^2 = z$. Deshalb ist es gerechtfertigt, $w(z)$ für $z \in \mathbb{C}, |1 - z| < 1$, als $\sqrt{z}$ zu notieren.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Zeige, dass auf $\mathbb{R}$ keine differenzierbare Funktion f mit $f(x) = w(x), |1 - x| < 1$, existiert.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Zeige, dass U kein Holomorphiebereich in $\mathbb{C}$ für w ist.

Aufgabe 7. (Fortsetzung) Zeige, dass für $p \in \mathbb{C}, p \neq 0$, eine zusammenhängende offene Teilmenge U' mit $\{p\} \cup U \subset U'$ und eine holomorphe Funktion $W : U' \to \mathbb{C}$ mit $w = W$ auf U existieren.

Aufgabe 8. (Fortsetzung) Zeige, dass keine holomorphe Funktion $W : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $W = w$ auf U existiert.

Hinweis: Aus Aufgabe 3 folgt, dass, wenn es doch eine solche Funktion W gäbe, die holomorphen Funktionen $z \mapsto W(z)^2$ und $z \mapsto z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ übereinstimmen würden. Für $t \in [0, 1[$ würde dann gelten $W(e^{2\pi it}) = e^{\pi it}$. Berechne das Wegintegral von dW über den geschlossenen Weg $t \in [0, 1] \mapsto e^{2\pi it} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Stelle einen Widerspruch mit der Annahme der Existenz der Funktion W fest.

Aufgabe 9. Definiere auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |1 - z| < 1\}$ mittels einer Potenzreihe eine holomorphe Funktion $w(z)$ mit $w(1) = 1$ und $w(z)^2 = \frac{z(1+z)}{2}$. Konstruiere auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ eine holomorphe Funktion W mit $W(1) = 1$ und $W(z)^2 = \frac{z(1+z)}{2}$.

Aufgabe 10. (Fortsetzung) Zeige, dass $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ Holomorphiebereich in $\mathbb{C}$ der Funktion W ist.

Aufgabe 11. Ein generisches Kunstwerk ist eine endliche Vereinigung von Geraden in der Ebene, derart dass die Anzahl von Doppelpunkten endlich und maximal ist. Eine generisches Kunstwerk bestehend aus n Geraden hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Doppelpunkten. Ein generisches Kunstwerk bestehend aus 3 oder mehr Geraden kann man kostengünstig mit n Nägeln stabil an der Wand befestigen, indem man durch n Doppelpunkte Nägel treibt, derart dass durch jede Gerade genau zwei Nägel gehen. Sei g_n die Anzahl möglicher kostengünstiger stabiler Befestigungen eines generisches Kunstwerkes von n Geraden mit n Nägeln. Offensichtlich gilt $g_0 = 1$ und wegen der Stabilität $g_1 = g_2 = 0$. Zeige für $n \geq 3$

$$g_n = (n-1)g_{n-1} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} g_{n-3}.$$

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$g(t) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{t^n}{n!}.$$

Zeige, dass die Funktion g die Differentialgleichung $g'(t) = tg'(t) + \frac{t^2}{2} g(t)$ erfüllt. Leite aus $\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{t^2}{2(1-t)}$ her:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp(-\frac{t^2 + 2t}{4}).$$

Hinweis: W. A. Whitworth, *Choice and chance*, Bell, 1901 (reprinted Haffner, 1965).