Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 0. Betrachte auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Zweipunktfunktion $\mathrm{dist}_{\log}(u,v) := \min\{|U-V| \mid U,V \in \mathbb{C}, \exp(U)=u, \exp(V)=v\}$. Zeige, dass $\mathrm{dist}_{\log}$ eine translationsinvariante Distanz auf der Gruppe $\mathbb{C}^*$ ist. Zeige, dass der Raum $(\mathbb{C}^*, \mathrm{dist}_{\log})$ vollständig ist.

Aufgabe 1. Sei $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \leq 1/2\} \subset \mathbb{C}^*$. Zeige, dass ein Produkt mit unendlich vielen Faktoren $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ in $\mathbb{C}^*$ genau dann in $(\mathbb{C}^*, \mathrm{dist}_{\log})$ konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1-a_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Hinweis: Sei $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \leq 1/2\} \subset \mathbb{C}^*$. Sei $\log_B : B \to \mathbb{C}$ die Funktion $\log_B(1-z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Für ein in $(\mathbb{C}^*, \mathrm{dist}_{\log})$ konvergentes Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart dass für alle $M \in \mathbb{N}, M \geq N$, gilt: $\prod_{n=N}^{M} a_n \in B$. Betrachte die "Reihe" $\log_B(\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n)$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Zeige, dass das Produkt $z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2})$ auf ganz $\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion s definiert. Zeige:

$$s(z+\pi) = s(z), z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Definiere die Funktion $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $ds = cdz$. Berechne $s(0), c(0)$.

Aufgabe 4. Für $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$, gilt die Identität

$$x^n - y^n = (x-y)\prod_{k=1}^{k=p}(x^2 - 2xy\cos(\frac{2\pi k}{n}) + y^2).$$

Hinweis:

$$x^2 - 2xy\cos(\frac{2\pi k}{p}) + y^2 = (x - \exp(\frac{2\pi i k}{n})y)(x - \exp(\frac{-2\pi i k}{n})y).$$

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Substituiere $x = (1+zi/n)$ und $y = (1-zi/n)$ in der Formel von 4 und leite her:

$$\frac{1}{2i}((1+zi/n)^n - (1-zi/n)^n) = \prod_{k=1}^{k=p}(1 - \frac{1+\cos(\frac{2\pi k}{n})}{1-\cos(\frac{2\pi k}{n})}\frac{z^2}{n^2}).$$

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Bilde in der Formel von 5 den Grenzübergang $p \to \infty$ (mit Begründungen) und erhalte

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}).$$

Aufgabe 7. Leite aus

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$$

und aus

$$d \log \circ \sin(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} dz$$

her:

$$\frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+z} - \frac{1}{k-z})$$

Aufgabe 8. Für $z = \frac{1}{4}$ ergibt sich:

$$\pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}.$$

Aufgabe 9. Zeige:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{16k^2 - 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Die Aufgaben $4 - 9$ stammen aus:

Introductio in Analysin Infinitorum,

Auctore Leonhardo Eulero,

Professore Regio Berolinensi, & Academia Imperialis Scientiarum Petropolitanae Socio.,

Tomus Primus,

Lausannae,

Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.

MDCCXLVIII