Prof. N. A'Campo Wintersemester 2001/02

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen I

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 0. Sei $U \subset \mathbb{C}, U \neq \mathbb{C}$, eine einfach zusammenhängende offene nichtleere Teilmenge. Wähle $a \in \mathbb{C} \setminus U, b \in U, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\beta^2 = b - a$. Konstruiere eine holomorphe Funktion $W : U \to \mathbb{C}$ mit $W(b) = \beta$ so, dass für $z \in U$ gilt: $W(z)^2 = z - a$.

Aufgabe 1. (Fortsetzung) Für $0 < r < R$ sei $U_{r,R} := \{z \in U \mid r < |z-a| < R\}$. Zeige: $W(U_{r,R})$ ist eine offene Teilmenge in $\{w \in \mathbb{C} \mid \sqrt{r} < |w| < \sqrt{R}\}$, deren Oberfläche $\frac{1}{2}\pi(R-r)$ nicht übersteigt. Hinweis: Es gelten $-W(U_{r,R}) \subset \{w \in \mathbb{C} \mid \sqrt{r} < |w| < \sqrt{R}\}$ und $-W(U_{r,R}) \cap W(U_{r,R}) = \emptyset$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Zeige, dass ein $c \in \frac{1}{2}\pi(R-r)$ und $\rho > 0$ existieren, derart dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq \rho\}$ das Bild $W(U_{r,R})$ nicht trifft.

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Zeige, dass die Funktion $G(z) := \frac{\rho}{w(z)-c}$ die Menge U injektiv auf eine Teilmenge in $E := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ abbildet.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Zeige: $G'(z) \neq 0$ für $z \in U$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Sei X die Menge aller injektiven holomorphen Funktionen $g : U \to E$ mit $g(b) = 0$ und $g'(b) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass der Raum $X \cup \{0\}$ für die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen in U kompakt ist.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Sei $h \in X$ die Funktion auf U, so dass $h'(b)$ maximal ist. Zeige, dass $h : U \to E$ bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung ist. Hinweis: Wäre h nicht surjektiv, dann existierte $a \in E$ mit $a \notin h(U)$. Definiere, siehe Aufgabe 0, eine Funktion

$$z \in U \mapsto W(z) := \sqrt{\frac{a - h(z)}{1 - \bar{a}h(z)}} \in E$$

mit $W(b)^2 = a$. Sei $h_1(z) := \frac{W(b)-W(z)}{1-\bar{W}(b)W(z)}$. Dann wäre für ein geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$ die Funktion $z \in U \mapsto e^{i\theta}h_1(z) \in E$ Element in X und es müsste gelten $e^{i\theta}h_1'(b) > h'(b)$.

Aufgabe 7. Beweise den folgenden Satz von **Bernard Riemann**, geb. 17. September 1826 in Breselenz (= Jameln bei Lüchow), verst. 20. Juli 1866 in Selasca (=Verbania in Italien):

Theorem 1 (Riemannscher Abbildungssatz.) *Sei $U \subset \mathbb{C}, U \neq \mathbb{C}$, eine einfach zusammenhängende offene nichtleere Teilmenge. Dann existiert eine Bijektion $h : U \to E : \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$, derart dass h und h^{-1} holomorph sind. Ist $b \in U$ gegeben, dann existiert genau eine holomorphe Bijektion $h : U \to E$ mit $h(b) = 0, h'(b) \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Aufgabe 8. (Fortsetzung) Zeige, dass U Holomorphiebereich in $\mathbb{C}$ einer holomorphen Funktion auf U ist.

Aufgabe 9. Sei U eine zusammenhängende offene nichtleere Teilmenge in $\mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass zu jeder holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine holomorphe Funktion W auf U mit $W^2 = f$ existiert. Zeige, dass entweder $U = \mathbb{C}$ gilt oder eine holomorphe Bijektion $h : U \to E$ existiert.

Aufgabe 10. Für eine offene Teilmenge U in $\mathbb{C}$ sei $O(U)$ der Ring aller holomorphen Funktionen auf U. Kann man aus $O(U)$ ablesen ob U zusammenhängend, oder einfach zusammenhängend, oder ganz C oder holomorph Äquivalent zu E ist?

Aufgabe 11. Zeige für $n \in N, n > 1$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Hinweis: Betrachte die Wegintegrale $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^n}$, wobei für $R \in R, R > 1$, der Weg γ_R aus drei Abschnitte zusammengesetzt ist. Die Abschnitte sind $[0, R]$ von 0 nach R, $t \in [0, 1/n] \mapsto Re^{2\pi i t}$ und $t \in [R, 0] \mapsto te^{2\pi i/n}$. Betrachte auch die Wegintegrale $\int_{\delta_{rho}} \frac{dz}{1+z^n}$, wobei der Weg δ_ρ durch $t \in [0, 1] \mapsto \delta_\rho(t) = e^{\pi i/n} + \rho e^{2\pi i t}, 0 < \rho < \frac{1}{2n}$ gegeben ist. Führe den Grenzübergang für $R \to +\infty$ und $\rho \to +0$ aus.

Aufgabe 12. Sei $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in Q[x], n > 0, a_{2n} \neq 0$, ein rationales Polynom ohne Nullstellen in R. Zeige, dass $I := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{P(x)}$ eine algebraische Zahl ist, d. h. I ist Nullstelle eines rationalen Polynoms.

Aufgabe 13. Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+7x^4}$.