Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen II

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid ||p||^2 = x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 = 1\}$ die 2-Sphäre im Euklidischen 3-Raum. Zu einer Funktion f auf S^2 sei f_{rad} die radial konstante Funktion $f_{\mathrm{rad}}(p) = f(\frac{p}{||p||})$ auf $R^3 \setminus \{0\}$. Der Laplaceoperator Δ_{S^2} auf Funktionen $f : S^2 \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$\Delta_{S^2}(f)(p) := \Delta_{R^3}(f_{\mathrm{rad}})(p), p \in S^2.$$

Zeige, dass Δ_{S^2} ein $O(3)$-invarianter linearer, stetiger Operator $\Delta_{S^2} : C^{k+2}(S^2) \to \mathbb{C}^k(S^2), k \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 2. Beschreibe alle linearen, stetigen, $O(3)$-invarianten Operatoren $A : C^{k+2}(S^2) \to \mathbb{C}^k(S^2), k \in \mathbb{N}$, für die gilt Träger$(Af) \subset$ Träger(f).

Aufgabe 3. Seien $\phi_\pm : C \to S^2$ die Karten $\phi(u + iv) = (tu, tv, \pm 1 - \pm 2t) \in S^2, t = \frac{4}{u^2+v^2+4}$. Berechne die Abbildung $\phi_-^{-1} \circ \phi_+ : C \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Welche Strukturen kann man auf der Mannigfaltigkeit S^2 mit dem Atlas $\{\phi_+, \phi_-\}$ beschreiben?

Aufgabe 4. Zeige, dass die Gleichung $\Delta_{S^2} f = g$ nicht für jede Funktion $g \in C^k(S^2), k \in \mathbb{N}$ eine Lösung $f \in C^{k+2}(S^2)$ hat.

Aufgabe 5. Sei $g : S^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(p) = z(p)^n, n \in \mathbb{N}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $\Delta_{S^2} f = g$ eine Lösung? Berechne die Lösungen, so weit vorhanden.

Aufgabe 6. Zeige, dass für jede stetige Funktion g auf S^2 genau ein $w \in \mathbb{R}$ existiert, derart dass die Gleichung $\Delta_{S^2} f = g - w$ eine Lösung $f \in C^2(S^2)$ hat.