Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen II

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei U eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^3$. Seien X, Y beliebig oft differenzierbare Vektorfelder auf U, so dass für $p \in U$ die Vektoren X_p und Y_p linear unabhängig sind. Konstruiere auf U eine 1-Differentialform ω, die auf U nirgendwo verschwindet, und mit $\omega_p(X_p) = \omega_p(Y_p) = 0$ für $p \in U$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Zeige für $p \in U$, dass $(d\omega(X,Y))_p = 0$ genau dann gilt, wenn die Vektoren X_p, Y_p und $[X,Y]_p$ linear abhängig sind. Hier ist $[X,Y]$ die Liesche Klammer.

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Wir setzen $d\omega(X,Y) = 0$ auf U voraus. Konstruiere auf U eine 1-Differentialform α, für die $d\omega = \alpha \wedge \omega$ gilt. Gilt die Bedingung von Frobenius: $\omega \wedge d\omega = 0$?

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Wir behalten die Voraussetzung $d\omega(X,Y) = 0$ auf U bei. Sei $p \in U$. Zeige, dass die 1-Differentialform ω wie in Aufgabe 1 lokal um p geschlossen gewählt werden kann. Konstruiere lokal um p eine Funktion ohne kritische Punkte f mit den Eigenschaften $(Df)(X) = 0$ und $(Df)(Y) = 0$.

Aufgabe 5. Sei $S^3 := \{x, y \in \mathbb{C}^2 \mid x\bar{x} + y\bar{y} = 1\}$. Seien X, Y auf S^3 die Vektorfelder, die tangent an S^3 sind, und durch $X_p := (ix(p), iy(p)), Y_p := (-\bar{y}(p), \bar{x}(p))$ gegeben sind. Hier $i := \sqrt{-1}$. Berechne $[X,Y]$. Existiert lokal auf S^3 eine Funktion f mit $(Df)(X) = 0$ und $(Df)(Y) = 0$?

Aufgabe 6. Konstruiere auf S^3 Tangentialvektorfelder X, Y die punktweise linear unabhängig sind, derart, dass lokal auf S^3 reguläre Funktionen f mit $(Df)(X) = (Df)(Y) = 0$ existieren. Zeichne die von X und Y definierte Blätterung auf S^3.