Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen II

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Eine Homotopie von Faserbundel mit Basis B ist ein Bundel $\pi : E \to B \times [0,1]$ mit Basis $B \times [0,1]$. Zeige, dass für $t \in [0,1]$ die Einschränkung von π zu $\pi_t : E_t \to B_t (= B)$, wobei $B_t = B \times \{t\}$ und $E_t = \pi^{-1}(B_t)$ sind, ein Faserbundel ist.

Aufgabe 2. Seien E, B Mannigfaltigkeiten. Sei $\pi : E \to B \times [0,1]$ ein differenzierbares Faserbundel. Wir nehmen an, dass die Mannigfaltigkeit B zusammenhängend ist. Sei N die typische Faser, $N = \pi^{-1}(b,t), b \in B$. Wir nehmen an, dass N kompakt ist. Sei H auf $B \times [0,1]$ das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial t}$. Konstuiere auf E ein Vektorfeld X mit $(D\pi)_p(X_p) = H_{\pi(p)}, p \in E$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Zeige, dass für $p \in E_0$ eine Lösungskurve $\gamma_p : [0,1] \to E$ zu der Differentialgleichung zu X mit $\gamma_p(0) = p$ und $\gamma_p(t) \in E_t, t \in [0,1]$ existiert.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Für $t \in [0,1]$ fest, sei $\phi_t : E_0 \to E_t$ die Abbildung $p \in E_0 \mapsto \gamma_p(t) \in E_t$. Zeige, dass ϕ_t ein Bundelisomorphismus vom Bundel π_0 nach π_t ist.

Aufgabe 5. Sei R der Raum aller Geraden in $\mathbb{R}^3$ mit $\#L \cap S^2 = 1$. Sei $\pi : R \to S^2$ die Abbildung wobei $L \in R$ auf $\pi(L) \in S^2$ mit $\{\pi(L)\} = L \cap S^2$ abgebildet wird. Zeige, dass π ein differenzierbares Faserbundel mit Basis S^2 und mit typischer Faser S^1 ist. Ist R diffeomorph zu $S^2 \times S^1$?

Aufgabe 6. Sei V der Raum aller Paaren (L,q), die aus einer Gerade L in $\mathbb{R}^3$ und einem Punkt $q \in \mathbb{R}^3$ mit $q \in L$, mit $\#L \cap S^2 = 1$ und mit $||p - q|| = 1$. Sei $\pi : V \to S^2$ die Abbildung wobei $(L,q) \in R$ auf $\pi(L,q) \in S^2$ mit $\{\pi(L,q)\} = L \cap S^2$ abgebildet wird. Zeige, dass π ein differenzierbares Faserbundel mit Basis S^2 und mit typischer Faser S^1 ist. Ist V diffeomorph zu $S^2 \times S^1$?

Aufgabe 7. Sind R und V diffeomorphe Räume? Zeige, dass die Vergissabbildung $(L,q) \in V \mapsto L \in R$ ein Faserbundel ist. Die typische Faser der Vergissabbildung ist ein diskreter topologischer Raum, und somit ist die Vergissabbildung eine Überlagerung.