Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen
in Topologie und Geometrie
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien $T_1 \subset T_2$ zwei kompakte Topologien auf einer Menge X. Zeige $T_1 = T_2$.

Aufgabe 2. Sei E eine Menge. Sei $l^1(E)$ der Vektorraum aller summierbaren Abbildungen $x \in E \mapsto a_x \in \mathbb{R}$. Zur Erinnerung: Eine Abbildung $a : E \to \mathbb{R}$ heisst summierbar, wenn eine $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede endliche Teilmenge $J \subset E$ die Abschätzung $\sum_{x\in J} |a_x| \leq M$ zutrifft. Für $a \in l^1(E)$ sei $||a||_{l^1} := \sup_{J\subset E, J\text{endlich}} \sum_{x\in J} |a_x|$. Zeige, dass $(l^1(E), || \, ||_{l^1})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 3. Sei $a \in l^1(E)$. Zeige, dass die Menge $\{x \in E \mid a_x \neq 0\}$ endlich oder abzählbar ist. Zeige, dass $l^1(\mathbb{N})$ ein separabler Banachraum ist.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ausgestattet mit zwei Normen $N_1, N_2 : V \to \mathbb{R}$, für die $N_1(u) \leq N_2(u), u \in V$, gilt. Wir nehmen an, dass V mit N_2 vollständig ist und dass die Normen N_1 und N_2 nicht äquivalent sind. Zeige, dass V mit N_1 nicht vollständig ist. Konstruiere eine nicht konvergente Cauchy-Folge in (V, N_1).

Aufgabe 5. Sei H ein linearer Unterraum in einem Banachraum $(V, || \, ||_V)$. Auf dem Quotientenvektorraum V/H definieren wir die Funktion $||u + H||_{V/H} := \inf_{h\in H} ||u + h||_V$. Zeige, dass $|| \, ||_{V/H}$ auf V/H eine Norm ist, wenn H in V abgeschlossen ist. Zeige, dass V/H zum Banachraum wird.

Aufgabe 6. Sei W ein separabler $\mathbb{R}$-Banachraum. Konstruiere im Banachraum $l^1(\mathbb{N})$ einen abgeschlossenen Unterraum H derart, dass die Banachräume $l^1(\mathbb{N})/H$ und W topologisch isomorph sind. Hinweis: konstruiere eine lineare, stetige und surjektive Abbildung $A : l^1(\mathbb{N}) \to W$.

Aufgabe 7. Sei E eine Menge. Zeige, dass die Banachräume $l^1(E)$ und $l^1(2^E)$ nicht topologisch isomorph sind. Existiert eine lineare Abbildung $A : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(2^{\mathbb{N}})$ mit dichtem Bild? Existiert eine lineare stetige Abbildung $A : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(2^{\mathbb{N}})$ mit dichtem Bild?

Aufgabe 8. Sei $H_{1/2}$ im Banachraum $C^0([0,1])$ der lineare Unterraum aller Funktionen $x \in [0,1] \mapsto (x - 1/2)f(x)$ mit $f \in C^0([0,1]$. Ist $H_{1/2}$ in $C^0([0,1]$ abgeschlossen? Bestimme den Abschluss H von $H_{1/2}$ in $C^0([0,1])$. Berechne $\dim C^0([0,1])/H$.

Aufgabe 9. Sei V ein Banachraum. Zeige, dass die Dimension endlich oder überabzählbar ist.

Aufgabe 10. Sei $C^0([0,1])^T$ der Untervektorraum im Raum aller reellen Funktionen auf $[0,1]$, der von den stetigen Funktionen und den Treppenfunktionen aufgespannt wird. Wir statten $C^0([0,1])^T$ mit der Maximumnorm $||f||_{C^0([0,1])^T} := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ aus. Ist $(C^0([0,1])^T, ||\,||_{C^0([0,1])^T})$ ein Banachraum? Ist der Raum der Treppenfunktionen dicht in $C^0([0,1])^T$?

Aufgabe 11. Sei $u : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ eine stetige Linearform. Konstruiere eine stetige Linearform $u^T : C^0([0,1])^T \to \mathbb{R}$ mit $||u||_{\mathrm{Op-norm}} = ||u^T||_{\mathrm{Op-norm}}$, die u erweitert.

Aufgabe 12. Für $t \in [0,1]$ sei H_t die Heavisidesche Funktion auf $[0,1]$ mit $H_t(x) = 0, x < t$, und $H_t(x) = 1, x \geq t$. Die Indikatorfunktion $\phi_{u^T} : [0,1] \to \mathbb{R}$ von u^T ist die Funktion $\phi_{u^T}(x) := u^T(H_x)$. Zeige, dass ϕ_{u^T} eine Funktion beschränkter Variation ist. Zeige, dass die Funktion ϕ_{u^T} stetig von rechts ist.

Aufgabe 13. Zeige für $f \in C^0([0,1])$, dass $u(f)$ durch das Stieltjes-Integral $\int_0^1 f(x)d\phi_{u^T}(x)$ gegeben ist. Hinweis: zeige $u^T(f) = \int_0^1 f(x)d\phi_{u^T}(x)$ für eine Treppenfunktion f.

Aufgabe 14. Zeige, dass die Indikatorfunktion ϕ_{u^T} nur von u und nicht von der Erweiterung u^T abhängt. Wir nennen ϕ_{u^T} die Indikatorfunktion ϕ_u von u. Zeige, dass die Variation $\mathrm{Var}(\phi_u)$ mit der Operatornorm $||u||_{\mathrm{Op-norm}}$ übereinstimmt.

Aufgabe 15. Sei das Radonsche Mass u auf $[0,1]$, d.h. eine stetige Linearform u auf $C^0([0,1]$, für $f \in C^0([0,1])$ durch $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)dx$ gegeben. Berechne ϕ_u.

Aufgabe 16. Sei das Radonsche Mass u auf $[0,1]$ für $f \in C^0([0,1])$ durch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\frac{1}{2^n})$ gegeben. Berechne ϕ_u.

Aufgabe 17. Wir beweisen nun den Satz von Riesz: Jedes Radonsche Mass u auf $[0,1]$ lässt sich eindeutig als Stieltjes-Integral $u(f) = \int_0^1 f(x)d\phi_u(x), f \in C^0([0,1])$, darstellen, wobei ϕ_u eine von rechts stetige Funktion beschränkter Variation mit $\phi_u(0) = 0$ ist.

Thomas Stieltjes, geboren den 29. Dezember 1856 in Zwolle, Overijssel, gestorben den 31. Dezember 1894 in Toulouse.

In
`www-gap.dcs.st-and.ac.uk/h̃istory/Mathematicians/Stieltjes.html`
ist festgehalten:
Stieltjes started his studies at the Polytechnical School of Delft in 1873 but spent his student years reading Gauss and Jacobi in the library rather than attending lectures. It may have been enjoyable to Stieltjes to read the works of these great mathematicians rather than study the coursework but the consequence was that he failed his examinations.