Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

# Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen
## in Topologie und Geometrie
## 2. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Sei $X$ ein topologischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}^m$ eine beschränkte Abbildung, deren Graph eine in $X \times \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Teilmenge ist. Zeige, dass $f$ stetig ist.

**Aufgabe 2**. Seien $V$ und $W$ Banachräume. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit abgeschlossenem Graph. Zeige, dass $f$ stetig ist.

**Aufgabe 3**. Sei $M$ eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Konstruiere für ein $m \geq n$ ein System von $m$ Vektorfeldern $X_1, X_2, \cdots, X_m$ auf $M$, sodass jedes stetige bzw. differenzierbare Vektorfeld $Y$ auf $M$ eine Linearkombination

$$Y = f_1 X_1 + f_2 X_2 + \cdots + f_m X_m$$

mit stetigen bzw. differenzierbaren Koeffizienten $f_i : M \to \mathbb{R}$ ist. Das minimale $m \in \mathbb{N}$ heisst Spann von $M$.

**Aufgabe 4**. Zeige, $\mathrm{Span}(M) \leq 2 * \mathrm{Dim}(M)$.

**Aufgabe 5**. Berechne den Spann von $S^2$ und $S^3$?

**Aufgabe 6**. Sei $C^0(M)$ der Raum aller stetigen reellen Funktionen auf $M$. Zeige, dass $C^0(M)$ ausgestattet mit der Maximumsnorm $||f||_{M,C^0} := \sup_{p \in M} |f(p)|$ ein Banachraum ist.

**Aufgabe 7**. Sei $C^1(M)$ der Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $M$. Für $f \in C^1(M)$ sei

$$||f||_{M,C^1} := ||f||_{M,C^0} + \max_{1 \leq i \leq m} ||Df(X_i)||_{M,C^0}$$

Zeige, dass $||\,||_{M,C^1}$ eine Norm auf $C^1(M)$ ist. Zeige, dass $C^1(M)$ mit $||\,||_{M,C^1}$ ein Banachraum ist.

**Aufgabe 8**. Sei $g$ eine Riemannsche Metrik auf $M$. Für eine Funktion $f \in C^1(M)$ sei $\nabla(f)$ das Gradientenvektorfeld zu $f$. Es gilt für Funktionen $f \in C^1(M)$ und Vektorfelder $X$ auf $M$ die Identität

$$Xf = Df(X) = g(\nabla(f), X),$$

die $\nabla(f)$ implizit definiert. Zeige, dass

$$||f||_{M,g,C^1} := ||f||_{M,C^0} + ||\sqrt{g(\nabla(f), \nabla(f))}||_{M,C^0}$$

eine zu $||\,||_{M,C^1}$ äquivalente Norm auf $C^1(M)$ definiert.

**Aufgabe 9**. Sei $L : C^1(M) \to C^0(M)$ die Inklusion. Zeige, dass $L$ stetig ist. Zeige, dass $L$ ein kompakter Operator ist.

**Aufgabe 10**. Sei $(e_i)_I$ ein vollständiges, orthonormales System im Hilbertraum $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, d.h.

- $\langle e_j, e_i\rangle$ ist 0 für $i \neq j$ und 1 für $i = j$,

- die Summe der in $H$ summierbare Familie $(\langle u, e_i\rangle)_I e_i$ ist $u$.

Zeige für $u \in H$, dass die Familie $(\langle u, e_i\rangle^2)_I$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ summierbar ist. Zeige:

$$\sum_{i\in I}\langle u, e_i\rangle\langle e_i, u\rangle = \langle u, u\rangle.$$

**Aufgabe 11**. Jeder Hilbertraum hat ein vollständiges, orthonormales System. Zwei vollständige, orthonormale Systeme eines Hilbertraumes haben gleiche Mächtigkeit. Zwei $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Hilberträume sind isometrisch genau wenn sie gleich-mächtigen vollständige, orthonormale Systeme haben.

**Aufgabe 12**. Zeige, dass jede Gruppe isomorph zu einer Untergruppe der Symmetriegruppe eines Hilbertraumes ist.

**Aufgabe 13**. Sei $K \subset H$ eine konvexe abgeschlosse Teilmenge in einem Hilbertraum $H$. Sei $p \in H \setminus K$. Sei $\rho = \inf_{q\in K} ||p-q||_H > 0$. Für ein $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, seien $a, b \in K \cap B^H(p, \rho+\epsilon)$. Zeige: $||a-b||_H \leq 2\sqrt{\epsilon^2 + 2\rho\epsilon}$. Konstruiere ein $q \in K$ mit $||p-q||_H = \rho$. Zeige: $\bar{B}^H(p,\rho) \cap K = \{q\}$. Setze die Identitätsabbildung $K \to K$ mit einer Lipschitzabbildung $H \to K$ fort.

**Aufgabe 14**. Sei $A : H \to H$ linear. Wir nehmen an, dass für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, die Menge $\{i \in I \mid ||A(e_i)||_H > \epsilon\}$ endlich ist. Folgt nun die Stetigkeit für $A$? Zeige falls $A$ stetig ist, dass $A$ kompakt ist.

**Aufgabe 15**. Sei $A$ eine Teilmenge in einem vollständigen metrischen Raum $(X, d)$. Wir nehmen an, dass $A$ präkompakt ist, d.h. dass für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, eine endliche Familie $(p_i)_{i\in J}, p_i \in X$, mit $X \subset \cup_{i\in J} B^X(p_i, \epsilon)$ existiert. Zeige, dass jede Folge in $A$ eine in $X$ konvergente Teilfolge hat. Schliesse, dass der Abschluss von $A$ in $X$ kompakt ist.

**Aufgabe 16**. Sei $Y$ eine präkompakte Teilmenge im Hilbertraum $H$. Konstruiere für $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, ein endlich dimensionaler Unterraum $E$ in $H$, so dass $Y \subset E_\epsilon$ gilt, wobei $E_\epsilon := \{p \in H \mid B^H(p, \epsilon) \cap E \neq \emptyset\}$ ist. Sei $p^H_E : H \to E$ die orthogonale Projektion von $H$ auf $E$. Zeige für $y \in Y$ die Abschätzung $||y - p^H_E(y)||_H \leq \epsilon$.

**Aufgabe 17**. Sei $A : H \to H$ eine kompakte lineare Abbildung. Konstruiere für $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, ein endlich dimensionaler Unterraum $E$ in $H$, so dass $||A - p^H_E \circ A||_{\text{Operatornorm}} \leq \epsilon$ gilt. Schliesse, dass der Raum $B_{00}(H)$ aller linearen Abbildungen endlichen Ranges $A : H \to H$ für die Operatornorm Topologie dicht im Raum $B_0(H)$ der linearen kompakten Abbildungen $A : H \to H$ ist. Es gilt sogar für die Operatornorm Topologie auf den Raum $B(H)$ aller stetigen linearen Abbildungen $A : H \to H$, dass der Abschluss von $B_{00}(H)$ in $B(H)$ gleich $B_0(H)$ ist.