Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen
in Topologie und Geometrie
5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$ sei $\mathbf{G}_{p,n}$ die Menge aller p-dimensionalen Untervektorräume in $\mathbf{C}^n$. Erkläre auf $\mathbf{G}_{p,n}$ eine kompakte Topologie, derart dass die Gruppe $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ mit Homöomorphismen auf $\mathbf{G}_{p,n}$ operiert.

Aufgabe 2. Für ein Vektorraum V sei $B(V)$ die Menge aller Isomorphismen von V nach $\mathbf{C}^{\dim(V)}$. Für $\alpha := (H, S, h, s) \in \mathbf{G}_{p,n} \times \mathbf{G}_{n-p,n} \times B(H) \times B(S)$ sei $U_\alpha := \{K \in \mathbf{G}_{p,n} \mid K \cap S = \{0\}\}$. Zeige, dass U_α offen in $\mathbf{G}_{p,n}$ ist. Interpretiere ein $K \in U_\alpha$ als Graph einer linearen Abbildung a_K von H nach S.

Aufgabe 3. Sei $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^{n-p})$ die stetige Bijektion mit $K \in U_\alpha \mapsto s \circ a_K \circ h^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^{n-p})$. Zeige, dass die Familie (U_α, ϕ_α) ein Kartensystem für $\mathbf{G}_{p,n}$ ist, welches $\mathbf{G}_{p,n}$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathbf{G}_{p,n}$ macht.

Aufgabe 4. Welche Dimension hat $\mathbf{G}_{p,n}$? Was ist die minimale Anzahl von Karten U_α, die $\mathbf{G}_{p,n}$ überdecken können? Haben die Differentiale der Kartenwechselabbildungen spezielle Eigenschaften? Die Mannigfaltigkeit $\mathbf{G}_{p,n}$ sind von Grassmann erfunden und heisst die Grassmannsche (p, n).

Aufgabe 5. Konstruiere für ein geeignetes $N \in \mathbf{N}$ eine Einbettung von $\mathbf{G}_{p,n}$ im projektiven Raum $\mathbf{P}^N(\mathbf{C}) = \mathbf{G}_{1,N+1}(\mathbf{C})$.

Aufgabe 6. Sei $\mathbf{E}_{p,n} := \{(v, V) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{G}_{p,n} \mid v \in V\}$. Sei $\pi_{p,n} : \mathbf{E}_{p,n} \to \mathbf{G}_{p,n}$ die Projektion $(v, V) \mapsto V$. Zeige, dass $\pi_{p,n}$ ein Vektorbundel ist.

Aufgabe 7. Sei $\beta : E \to B$ ein Vektorbundel über einen kompakten metrischen Raum B mit Faserdimension d. Konstruiere für ein geeignetes $N \in \mathbf{N}$ eine stetige Abbildung $f : B \to \mathbf{G}_{d,N}$, so dass die Bundel $f^*\pi_{d,N}$ und β isomorph sind.