Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen in Topologie und Geometrie

7. Aufgabenblatt

aufgabe1 Seien $A, B, C, D, E \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C})$ eine Konfiguration von 5 Punkten in der komplexen projektiven Ebene, derart dass mit einer Gerade höchtens zwei Punkte dieser Konfiguration inzident sein können. Zeige, dass die Punkte A, B, C, D, E auf einer eindeutigen Quadrik liegen. Zeige, dass diese Quadrik ohne singuläre Punkte ist. Hinweis: Konstruiere zwei verschiedene Quadriken Q_1, Q_2 auf deren die Punkte A, B, C, D liegen. Seien $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$ homogene Gleichungen für Q_1, Q_2. Wähle $t \in \mathbf{C}$ so, dass der Punkt E auf $Q := \{(x : y : z) \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C}) \mid tf_1(x, y, z) + (1-t)f_2(x, y, z) = 0\}$ liegt.

Aufgabe 2. Seien A, B, C, D, E, F, G, H eine Konfiguration in $\mathbf{CP}^2(\mathbf{C})$ von Punkte. Konstruiere eine Kubik durch A, B, C, D, E, F, G, H. Hinweis: Kläre vorerst den Fall, wo drei Punkte dieser Konfiguration auf einer Gerade liegen, ab. Konstruiere zwei verschiedene Kubiken durch A, B, C, D, E, F, G. Konstruiere mittels einer Linearkombination der Gleichungen eine Kubik K durch A, B, C, D, E, F, G, H.

Aufgabe 3. Seien K_1, K_2 Kubiken in $\mathbf{CP}^2(\mathbf{C})$ deren Durchschnitt aus 9 Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, X$ besteht. Sei K eine Kubik durch A, B, C, D, E, F, G, H. Zeige $X \in K$. Hinweis: seien $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$ homogene Gleichungen für K_1, K_2. Sei $g(x, y, z) = 0$ eine homogene Gleichung für K. Zeige, dass genau für ein $t \in \mathbf{C}$ die Kubiken K und $K_t := \{(x : y : z) \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C}) \mid tf_1(x, y, z) + (1-t)f_2(x, y, z) = 0\}$ im Punkt A eine Schnittmultiplizität > 1 haben. Diese Schnittmultiplizität ist dann 2. Allgemeiner, zeige unter der Annahme $X \notin K$, dass für jedes $(a : b : c) \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C})$ eindeutig ein $(t : 1) \in \mathbf{CP}^1(\mathbf{C})$ existiert, derart dass die Kubiken $K_{a,b,c} := \mathbf{CP}^2(\mathbf{C}) \mid af_1(x, y, z) + (bf_2(x, y, z) + cg(x, y, z) = 0\}$ und K_t im Punkt A eine Schnittmultiplizität ≥ 2 haben. Die Zuordnung $(a : b : c) \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C}) \mapsto (t : 1) \in \mathbf{CP}^1(\mathbf{C})$ ist holomorph und nicht konstant! Somit wiederlegen wir die Annahme $X \notin K$.

Aufgabe 4. Jede Kubik K durch A, B, C, D, E, F, G, H ist in der Schar K_t.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Sei $Y \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C})$ und $Y \notin \{A, B, C, D, E, F, G, H, X\}$. Zeige, dass genau ein $(t : 1) \in \mathbf{CP}^1(\mathbf{C})$ mit $Y \in K_t$ existiert. Ist die Abbildung $\pi : Y \in \mathbf{CP}^2(\mathbf{C}) \setminus \{A, B, C, D, E, F, G, H, X\} \mapsto \mathbf{CP}^1(\mathbf{C})$ ein Bundel mit als Fasern 9-fach gelöcherten Tori? Das Skript pencil3.pic in `www.geometrie.ch` zeichnet mit SURF die Fasern in $\mathbf{R}^2$ der Abbildung π.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Durch aufblasen in $A, B, C, D, E, F, G, H, X$ modifiziere $\mathbf{CP}^2(\mathbf{C})$ zu der Varietät M. Zeige, dass π eine holomorphe Abbildung $\pi_M : M \to \mathbf{CP}^1(\mathbf{C})$ induziert. Ist π_M ein Bundel mit als Fasern Tori?

Aufgabe 7. (Fortsetzung) Zeige, dass durch Weglassen aus M von höchtens 12 Fasern von π_M die Abbildung π_M zu einem Bundel wird.