Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen in Topologie und Geometrie II

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien E, F, G der Reihe nach die Vektorräume aller stetigen, oder beliebig oft differenzierbaren, oder holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sei $P \in G$ ein Polynom. Die Zuordnung $f \mapsto Pf$ definiert Endomorphismen der drei Vektorräume, deren Index jeweils zu bestimmen ist, falls Kern und Kokern endlicher Dimension sind.

Aufgabe 2. Berechne die singuläre und die simpliziale Homologie von $\partial\Delta^n$.

Aufgabe 3. Seien X, Y endliche simpliziale Komplexe. Sei $f : |X| \to |Y|$ eine stetige Abbildung. Sei $d = \dim(X)$. Konstruiere in der Homotopieklasse von f eine stetige Abbildung $g : |X| \to |Y|$ mit $\text{Bild}(g) \subset |Y^d|$.

Aufgabe 4. Für $p, q \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{p,q} := \{x \in \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mid ||x|| = 1 \,\text{oder}\, (x \in \{0\} \times \mathbb{R}^q \,\text{und}\, ||x|| \leq 1)\}$$

Zeige, dass der Homotopietypus von $A_{p,q}$ das Paar (p, q) bestimmt.

Aufgabe 5. Zeige, dass jede stetige Abbildung $f : S^2 \to T^2$ nullhomotop ist. Berechne die von f induzierte Abbildung $f_* : H_*(S^2) \to H_*(T^2)$.

Aufgabe 6. Konstruiere zwei nicht homotope Räume mit isomorpher Homologie. Vorschlag: T^2 und $S^2 \vee S^1 \vee S^1$.