Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen in Topologie und Geometrie II

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Formuliere und beweise Fünfer- und Schlangenlemma.

Aufgabe 2. Sei X ein simplizialer Komplex. Ein simpliziales Simplex $\sigma : \Delta^n \to X$ heisst nichtentartet, wenn es von einer injektiven Eckenabbildung induziert ist. Zeige, dass der Komplex, der von den nichtentarteten Simplizes unter Berücksichtigung der Signumsrelationen aufgespannt wird, die simpliziale Homologie von X berechnet. Für ein nicht entartetes Simplex $\sigma : \Delta^n \to X$ und eine Permutation $\pi : \Delta^n \to \Delta^n$ ist $\sigma - \mathrm{Signum}(\pi)\, \sigma \circ \pi = 0$ eine Signumsrelation.

Aufgabe 3. Sei X ein endlicher simplizialer Komplex. Zeige, dass die simpliziale Eulercharacteristik von X eine topologische Invariante der Realisierung $|X|$ von X ist.

Aufgabe 4. Sei M eine kompakte differenzierbar triangulierte Mannigfaltigkeit mit $\chi(X) = 0$. Konstruiere auf X ein Vektorfeld ohne Nullstellen.

Aufgabe 5. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit $\chi(X) = 0$. Konstruiere auf X ein Vektorfeld ohne Nullstellen. Hinweis: benutze eine Morsefunktion.

Aufgabe 6. Berechne die Homologie einer Fläche von Geschlecht g.

Aufgabe 7. Konstruiere eine orientierungstreue Involution h_g der Fläche S_g vom Geschlecht $g, g > 0$, deren Wirkung auf $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ jedes v auf $-v$ abbildet. Berechne die Lefschetzzahl von h_g. Wieviele Fixpunkte hat h_g?

Aufgabe 8. Zeige, dass h_2 ein zentrales Element der Abbildungsklassengruppe M_2 der Fläche S_2 ist.

Aufgabe 9. Sei $f : M -> M$ eine differenzierbare Abbildung auf einer Mannigfaltigkeit M mit $f \circ f = f$. Zeige, dass das Bild $f(M)$ eine Untermannigfaltigkeit in M ist.