Prof. N. A'Campo Sommersemester 2002/03

Übungen zur Vorlesung Elementare elliptische Relationen in Topologie und Geometrie II

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei auf S^3 eine geschlossene 1-Differentialform ω gegeben. Zeige, dass ω Nullstellen hat.

Aufgabe 2. Konstruiere auf der komplexen projektiven Ebene $P^2(\mathbb{C})$ eine Triangulierung.

Aufgabe 3. Berechne den Kohomologiering mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ von $P^n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 4. Konstruiere eine Faserungsabbildung $\phi : SL(2,\mathbb{R}) \to S^1$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Zeige, dass ϕ kein Gruppenhomomorphismus sein kann.

Aufgabe 6. Sei R auf $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ die minimale Äquivalenzrelation mit $tRe^{2\pi t}, t \in [0,1]$. Berechne die Homologie von D/R.

Aufgabe 7. Ist D/R homöomorph zu der topologischen Realisierung $|X|$ eines simplizialen Komplexes X. Kann man X so wählen, das X eine stückweise lineare Einbettung in $\mathbb{R}^3$ hat ?

Aufgabe 8. Sei X ein lokalkompakter topologischer Raum. Sei Y eine Menge, die X als Teilmenge hat, derart dass $Y \setminus X$ eine einelementige Menge ist. Zeige, dass auf Y genau eine kompakte Topologie existiert, derart dass die Inklusion $X \to Y$ stetig ist. Der Raum Y heisst Alexandroffsche Kompaktifizierung von X.

Aufgabe 9. Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel. Sei T eine Menge, derart dass $T \setminus E$ eine einelementige Menge $\{*\}$ ist. Zeige, dass auf T genau eine Topologie Θ existiert, derart dass die Inklusion $E \to T$ stetig ist, dass jede Faser in T einen kompakten Abschluss hat, und dass $\pi : T \setminus \{*\} \to B$ ein topologisch lokaltriviales Bündel ist. Der Thomsche Raum des Vektorbündels $\pi : E \to B$ ist der Raum (T, Θ).

Aufgabe 10. Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel. Eine Teilmenge $K \subset E$ heisst faserweise kompakt, wenn für jede Faser F der Durchschnitt $F \cap K$ kompakt ist. Zeige, dass eine Teilmenge $U \subset T$ genau dann eine Umgebung von $\{*\}$ im Raum (T, Θ) ist, wenn eine faserweise kompakte Teilmenge K in E mit $K \cup U = T$ existiert.

Aufgabe 11. Sei $\pi : E \to B$ ein Vektorbündel und sei B kompakt. Zeige, dass die Alexandroffsche Kompaktifizierung von E der Thomsche Raum des Bündels π ist.

Aufgabe 12. Sind die Thomschen Räume der Tangentialbündel an S^2 und T^2 homotopieäquivalent? Hinweis: Berechne die Euler-Poincaresche Charakteristik.