Prof. N. A'Campo Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung Geometrie I

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei X eine Menge. Ein Filter auf X ist eine Teilmenge F der Potenzmenge von X, für die folgende Eigenschaften gelten:
- $\emptyset \notin F$ und $X \in F$,
- aus $A, B \in F$ folgt $A \cap B \in F$,
- aus $A \in F$ und $B \subset X$ mit $A \subset B$ folgt $B \in F$.

Sei $p \in X$. Sei $F := \{A \subset X \mid p \in A\}$. Zeige, dass F ein Filter ist. Wir nehmen an, dass die Menge X nicht endlich ist. Sei $F_X := \{A \subset X \mid X \setminus A \,\text{endlich}\}$. Zeige, dass F_X ein Filter ist.

Aufgabe 2. Sei $X = (X, T)$ ein topologischer Raum und sei F ein Filter auf X. Ein Punkt $p \in X$ heisst Häufungspunkt von X, wenn für alle $A \in F$ und alle $U \in T$ mit $p \in U$ der Durchschnitt $A \cap U$ nichtleer ist. Zeige, dass die Menge der Häufungspunkte des Filters F in X der Durchschnitt der Abschlüsse in X der Mengen $A \in F$ ist.

Aufgabe 3. Sei $X = (X, T)$ ein kompakter topologischer Raum und sei F ein Filter auf X. Zeige, dass F in X Häufungspunkte hat.

Aufgabe 4. Sei $X = (X, T)$ ein topologischer Raum mit Hausdorffscher Trennungseigenschaft. Wir nehmen an, dass jeder Filter auf X einen Häufungspunkt hat. Zeige, dass der Raum X kompakt ist. Hinweis: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Zeige, dass $(X \setminus \cup_{i \in J} U_i)_{J \subset I, J \text{ endlich}}$ in X ein Filter ohne Häufungspunkte ist, genau wenn $X \neq \cup_{i \in J} U_i$ für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ gilt.

Aufgabe 5. Sei X eine Menge. Ein Ultrafilter auf X ist ein Filter F auf X derart, dass für alle $A, B \subset X$ mit $A \cup B \in F$ die Aussage $A \in F$ oder $B \in F$ zutrifft. Zeige, dass jeder Filter auf X in einem Ultrafilter auf X enthalten ist. Hinweis: Ultrafilter sind maximale Elemente in der Menge aller Filter.

Aufgabe 6. Sei $X = (X, T)$ ein topologischer Raum mit Hausdorffscher Trennungseigenschaft. Zeige, dass ein Ultrafilter auf X höchstens einen Häufungspunkt hat.

Aufgabe 7. Zeige, dass ein topologischer Raum kompakt ist, wenn jeder Ultrafilter auf X genau einen Häufungspunkt hat.

Aufgabe 8. (Satz von Tychonov). Ein Produkt von kompakten topologischen Räumen ist kompakt. Hinweis: Sei F ein Ultrafilter auf $X = \Pi_{i \in I} K_i$. Zeige, dass für jedes $i \in I$ die Projektion von F auf K_i ein Ultrafilter auf K_i ist.

Aufgabe 9. Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ ein kompaktes, konvexes Osterei derart, dass für alle $v \in \mathbb{R}^3$ mit $(v, v) = 1$ gilt: $2 = \text{Maximum}_{p,q \in E}(v, p - q)$. Hier ist $(?, ?)$ das Skalarprodukt von $\mathbb{R}^3$. Ist das Ei E eine Euklidische Kugel? Frohe Ostern!