Prof. N. A'Campo Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung Geometrie I

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension und sei $||?||_V$ eine Norm auf V. Sei B eine nichtleere beschränkte Teilmenge in V. Zeige, dass ein minimales $R \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass ein $p \in V$ mit $B \subset B(p, R)$ existiert.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Wir nehmen an, dass die Norm $||?||_V$ eine Euklidische ist. Sei $R_B = R \in \mathbb{R}$ minimal mit $B \subset B(p, R)$. Zeige, dass eindeutig ein $p \in V$ mit $B \subset B(p, R_K)$ existiert.

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension mit Euklidischer Norm $||v||_V = \sqrt{(v, v)_V}, v \in V$. Sei $K \subset V$ nichtleer, kompakt und konvex. Sei $p \in V \setminus K$. Zeige, dass eindeutig ein $h \in V$ von minimaler Norm $R := ||h||_V$ mit $p + h \in K$ existiert. Zeige, dass die Hyperebene $\{p + \frac{1}{2}h + v \mid (h, v)_V = 0\}$ den Punkt p und Teilmenge K trennt.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension mit Euklidischer Norm $||v||_V = \sqrt{(v, v)_V}, v \in V$. Sei $K_1 \subset V$ nichtleer, kompakt und konvex. Sei K_2 nichtleer, abgeschlossen in V und konvex. Zeige, dass ein minimales $R \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass ein $p \in K_1$ und $q \in K_2$ mit $R = ||p - q||_V$ existieren. Für $p \in K_1$ und $q \in K_2$ mit $||p - q||_V$ minimal, zeige, dass die Hyperebene $\{\frac{p+q}{2} + v \mid (v, p - q)_V = 0\}$ die Teilmengen K_1 und K_2 trennt.

Aufgabe 5. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension mit Euklidischer Norm $||v||_V = \sqrt{(v, v)_V}, v \in V$. Sei K kompakt und konvex. Sei $R \in \mathbb{R}$ und $p \in K$ mit $B(p, R) \subset K$. Sei S_V die Sphäre der Einheitsvektoren von V. Wir erklären die Stützfunktion $H_K : S_V \to \mathbb{R}$ von K wie folgt: für $v \in S_V$ setze $H_K(v) = \text{Maximum}_{k \in K}(v, k)_V$. Zeige: $K = \{u \in V \mid (u, v)_V \leq H_K(v), v \in S_V\}$. Hinweis: Zeige, dass die Menge $\{u \in V \mid (u, v)_V \leq H_K(v), v \in S_V\}$ konvex ist und K enthält. Ein $p \in \{u \in V \mid (u, v)_V \leq H_K(v), v \in S_V\}$ mit $p \notin K$ und $h \in V$ mit $p + h \in K$, sowie in Aufgabe 3, führte auf $(p, -h)_V > H_K(-h)$.

Aufgabe 6. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension mit Euklidischer Norm $||v||_V = \sqrt{(v, v)_V}, v \in V$. Sei K kompakt und konvex. Sei $p \in K$. Seien $r, R \in$ mit $0 < r < R$ und mit $B(p, r) \subset K \subset B(p, R)$. Zeige, dass die Stützfunktion $H_K : S_V \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzfunktion mit Lipschitzkonstante $\frac{R}{r}$ ist.

Aufgabe 7. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension mit Euklidischer Norm $||v||_V = \sqrt{(v, v)_V}, v \in V$. Seien $r, R \in$ mit $0 < r < R$. Sei X die Menge aller kompakten konvexen Teilmengen $K \subset V$ mit $B(0, r) \subset K \subset B(0, R)$. Für $A, B \in X$ sei $d_X(A, B) = ||H_A - H_B||_{C^0}$. Zeige, dass d_X eine Distanzfunktion auf X ist, und dass die Topologie von d_X auf X kompakt ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Zeige, dass X mit der Topologie der Hausdorffdistanz kompakt ist.

Aufgabe 9. (Satz von Mahler). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension. Sei $A \subset V$ konvex und offen, sei $B \subset V$ kompakt, konvex mit $A \subset B$. Der Raum aller kompakten, konvexen Teilmengen K mit $A \subset K \subset B$ ist kompakt.

Aufgabe 10. (Satz von Mahler). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension. Sei $||?||_V$ eine Norm auf V. Ein Gitter in V ist eine Untergruppe, die von einer Basis von V erzeugt wird. Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$. Sei X der Raum aller Gitter Γ in V derart, dass

- $B^V(0, r) \cap \Gamma = \{0\}$,

- $B^V(0, R) \cap \Gamma$ enthält eine Basis für V.

Dann ist X bezüglich der Topologie von Chabauty kompakt.