Prof. N. A'Campo Sommersemester 2006

Übungen zur Vorlesung Geometrie I

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei P die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Sei $A \subset P \times P$ die Äquivalenzrelation die von den Paaren $\{(e^{2\pi i(k+\alpha)/6}, e^{2\pi i(k+3-\alpha)/6}) \mid k = 0, 1, 2 \cdots 5, \alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ erzeugt wird. Zeige, dass der Quotientenraum P/A eine Fläche ist. Bestimme die Fläche P/A.

Aufgabe 2. (Fortsetzung)). Konstruiere eine überlagerung $\phi : \mathbb{R}^2 \to P/A$.

Aufgabe 3. Sei P die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Sei $A_h \subset P \times P$ die Äquivalenzrelation die von den Paaren $\{(e^{2\pi i \frac{k+\alpha}{2h}}, e^{2\pi i \frac{k+h-\alpha}{2h}}) \mid k = 0, 1, 2 \cdots 2h-1, \alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ erzeugt wird. Zeige, dass der Quotientenraum P/A_h eine Fläche ist. Bestimme die Fläche P/A_h.

Aufgabe 4. Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heisst eigentlich wenn das Urbild $f^{-1}(K)$ einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist. Konstruiere eine stetige, injektive und nicht eigentliche Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5. Konstruiere eine stetige, surjektive und eigentliche Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6. Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ heisst ϵ-dicht in $\mathbb{R}^2$ wenn jede euklidische Kugel von Radius ϵ die Teilmenge S trift. Sei $\epsilon > 0$. Konstruiere eine eigentliche, stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit einem Bild, dass in $\mathbb{R}^2$ ϵ-dicht ist.

Aufgabe 7. Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^2$ heisst dicht in $\mathbb{R}^2$ wenn jede nichtleere offene Teilmenge in $\mathbb{R}^2$ die Teilmenge S trift. Gibt es eine eigentliche, stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit einem Bild, dass in $\mathbb{R}^2$ dicht ist?