Dr. Alexander N. Schumakovitch Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Homotopietheorie

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien X und Y topologische Räume. Beweise, dass
a) die Menge $\pi(X, I)$ nur ein einziges Element hat;
b) jede zwei Wege $s, s' : I \to Y$ in Y homotop sind, sobald Y wegzusammenhängend ist;
c) die Anzahl von Elementen von $\pi(I, Y)$ gleich der Anzahl von Wegkomponenten von Y ist. (5)

Aufgabe 2. Beweise, dass jede zwei stetige Abbildungen von einem Raum X nach einem
a) konvexen,
b) sternkonvexen
Teilraum von $\mathbb{R}^n$ homotop sind. (4)
Erinnerung: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heisst sternkonvex, wenn ein Punkt $b \in A$ existiert, so dass für jedes $x \in A$ die ganze Strecke $[b, x]$, die b mit x verbindet, in A enthalten ist).

Aufgabe 3. Beweise, dass jede nicht-surjektive Abbildung von einem beliebigen topologischen Raum X nach S^n homotop zu einer konstanten Abbildung ist. (4)

Aufgabe 4. Seien f, g Abbildungen von einem topologischen Raum X nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ für jedes $x \in X$ gilt. Beweise, dass f und g homotop sind. (3)

Aufgabe 5. Seien f, g Abbildungen von einem topologischen Raum X nach $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so dass $|f(x) - g(x)| < 2$ für jedes $x \in X$ gilt. Beweise, dass f und g homotop sind. (4)
Tip: Betrachte die Strecke $[f(x), g(x)] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wie hilft sie?

Aufgabe 6. Sei $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung, die fixpunktfrei ist (d.h. $f(x) \neq x$ für jedes $x \in S^n$). Beweise, dass f homotop zur Symmetrie $x \mapsto -x$ ist. (2)

Aufgabe 7. Seien X ein metrischer Raum, und $u, v, w : I \to X$ drei Wege, so dass die Produkte uv und vw definiert sind und $(uv)w = u(vw)$ gilt. Beweise, dass u, v und w konstante Abbildungen sind. (5)

Aufgabe 8. Finde einen indiskreten topologischen Raum X und drei nicht konstante Wege $u, v, w : I \to X$, so dass die Produkte uv und vw definiert sind und $(uv)w = u(vw)$ gilt. (3)

Total Punkte: (30)

Abgabe bis Donnerstag, den 23. Mai, um 12 Uhr.