Dr. Alexander N. Schumakovitch Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Homotopietheorie

3. Aufgabenblatt

Lokale Homöomorphismen und Überlagerungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst ein *lokaler Homöomorphismus* wenn jeder Punkt von X eine Umgebung U hat, so dass das Bild $f(U)$ in Y offen ist, und die Einschränkung $f\big|_U : U \to f(U)$ von f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 1. 1. Beweise, dass jede Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist.
2. Finde einen lokalen Homöomorphismus, der keine Überlagerung ist. (3)

Aufgabe 2. 1. Seien $f : X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus und $A \subset X$ offen. Beweise, dass die Einschränkung $f\big|_A$ von f auch ein lokaler Homöomorphismus ist.
2. Sei $f : \mathbb{R} \to S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ die standarde Überlagerung. Beschreibe alle Teilmengen A von $\mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f\big|_A$ von f auch eine Überlagerung ist. (4)

Aufgabe 3. Sei $n > 0$ beliebig. Beweise, dass
a) $S^1 \to S^1 : z \mapsto z^n$,
b) $\mathbb{C} \smallsetminus 0 \to \mathbb{C} \smallsetminus 0 : z \mapsto z^n$
eine n-fache Überlagerung ist. (3)

Aufgabe 4. Seien $p : X \to B$ und $p' : X' \to B'$ Überlagerungen. Beweise, dass $p \times p' : X \times X' \to B \times B'$ auch eine Überlagerung ist. Wieviel Blätter hat sie, falls p eine $n-$blättrige und p' eine $n-$blättrige Überlagerungen sind? (5)

Aufgabe 5. Finde eine Überlagerung vom Möbiusschen Band
a) mit einem Zylinder,
b) mit einem Möbiusschen Band.
Wieviel Blätter kann sie in beiden Fällen haben? (6)

Aufgabe 6. Finde eine Überlagerung der Kleinschen Flasche mit $\mathbb{R}^2$. Beschreibe explizit die Zerlegung von $\mathbb{R}^2$ in Urbilder von Punkten unter dieser Überlagerung. (5)

Aufgabe 7. Konstruiere eine d-blättrige Überlagerung der Sphäre mit p Henkeln mit der Sphäre mit $1 + d(p-1)$ Henkeln. (4)

Aufgabe 8. Fundamentalsatz der Algebra Sei $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ein komplexes Polynom vom Grad $n > 0$. Beweise, dass es eine komplexe Nullstelle hat.
Tip 1: Falls p keine Nullstellen hätte, würde p eine stetige Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \smallsetminus 0$ definieren.
Tip 2: Betrachte $q(z) = z^n$ und $r(z) = p(z) - q(z)$. Dann existiert eine positive Zahl R, so dass für jedes z mit $|z| = R$ es $|r(z)| < |q(z)| = R^n$ gilt. (10)
Tip 3: Aufgabe 4 des 1. Aufgabenblattes.
Tip 4: Fundamentalgruppe der Kreislinie ist nicht trivial.

Total Punkte: (40)

Abgabe bis Donnerstag, den 6. Juni, um 12 Uhr.