Dr. Alexander N. Schumakovitch Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Homotopietheorie

3. Aufgabenblatt

Lokale Homöomorphismen und Überlagerungen

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst ein *lokaler Homöomorphismus* wenn jeder Punkt von X eine Umgebung U hat, so dass das Bild $f(U)$ in Y offen ist, und die Einschränkung $f\big|_U : U \to f(U)$ von f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 1. 1. Beweise, dass jede Überlagerung ein lokaler Homöomorphismus ist. 3
2. Finde einen lokalen Homöomorphismus, der keine Überlagerung ist.

Aufgabe 2. 1. Seien $f : X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus und $A \subset X$ offen. Beweise, dass die Einschränkung $f\big|_A$ von f auch ein lokaler Homöomorphismus ist. 4
2. Sei $f : \mathbb{R} \to S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ die standarde Überlagerung. Beschreibe alle Teilmengen A von $\mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f\big|_A$ von f auch eine Überlagerung ist.

Aufgabe 3. Sei $n > 0$ beliebig. Beweise, dass
a) $S^1 \to S^1 : z \mapsto z^n$,
b) $\mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z^n$ 3
eine n-fache Überlagerung ist.

Aufgabe 4. Seien $p : X \to B$ und $p' : X' \to B'$ Überlagerungen. Beweise, dass $p \times p' : X \times X' \to B \times B'$ auch eine Überlagerung ist. Wieviel Blätter hat sie, falls p eine $n-$blättrige und p' eine $n-$blättrige Überlagerungen sind? 5

Aufgabe 5. Finde eine Überlagerung vom Möbiusschen Band
a) mit einem Zylinder,
b) mit einem Möbiusschen Band. 6
Wieviel Blätter kann sie in beiden Fällen haben?

Aufgabe 6. Finde eine Überlagerung der Kleinschen Flasche mit $\mathbb{R}^2$. Beschreibe explizit die Zerlegung von $\mathbb{R}^2$ in Urbilder von Punkten unter dieser Überlagerung. 5

Aufgabe 7. Konstruiere eine d-blättrige Überlagerung der Sphäre mit p Henkeln mit der Sphäre mit $1 + d(p-1)$ Henkeln. 4

Aufgabe 8. Fundamentalsatz der Algebra Sei $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ein komplexes Polynom vom Grad $n > 0$. Beweise, dass es eine komplexe Nullstelle hat.
Tip 1: Falls p keine Nullstellen hätte, würde p eine stetige Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus 0$ definieren.
Tip 2: Betrachte $q(z) = z^n$ und $r(z) = p(z) - q(z)$. Dann existiert eine positive Zahl R, so dass für jedes z mit $|z| = R$ es $|r(z)| < |q(z)| = R^n$ gilt. 10
Tip 3: Aufgabe 4 des 1. Aufgabenblattes.
Tip 4: Fundamentalgruppe der Kreislinie ist nicht trivial.

Total Punkte: 40

Abgabe bis Donnerstag, den 6. Juni, um 12 Uhr.