Dr. Alexander N. Schumakovitch Sommersemester 2002

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Homotopietheorie

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Beweise, dass die Abbildung $\mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z^3$ nicht zur identischen Abbildung $\mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z$ homotop ist. (3)

Aufgabe 2. Seien X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, die zu einer stetigen Abbildung $\mathbb{R}^n \to Y$ erweiterbar ist. Beweise, dass $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ ein trivialer Homomorphismus für jedes $x_0 \in X$ ist. (4)

Aufgabe 3. Beweise folgende Verallgemeinerungen des Zwischenwertsatzes:
1. Sei $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, die auf $\partial D^2 = S^1$ fest ist. Dann gilt $f(D^2) \supset D^2$.
2. Sei $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, so dass $f(S^1)$ einen Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ nicht enthält. Angenommen, dass die Kreisschlinge $f|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2 \setminus a$ nicht homotop trivial ist. Dann existiert $x \in D^2$, so dass $f(x) = a$. (6)

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, so dass $|f(x) - x| \leq 1$. Beweise, dass f surjektiv ist. (5)

Aufgabe 5. Seien $u, v : I \to I^2$ zwei Wege, die gegenüberliegende Ecken verbinden: $u(0) = (0, 0)$, $u(1) = (1, 1)$, $v(0) = (0, 1)$ und $v(1) = (1, 0)$. Beweise, dass $u(I) \cap v(I)$ nicht leer ist. (6)
Tip: Betrachte $w : I^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto u(x) - v(y)$ und beweise, dass 0 ein Wert von w ist.

Aufgabe 6. Beweise den **Borsuk-Ulamschen Satz** (für $n = 0, 1, 2$):
Für jede stetige Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existiert ein Punkt $x \in S^n$, so dass $f(x) = f(-x)$. (6)
Tip: Falls $f(x) \neq f(-x)$ für jedes $x \in S^2$ wäre, würde eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^1$, die einen nicht-trivialen Homomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \to \pi_1(\mathbb{R}P^1)$ induziert, existieren.

Total Punkte: (30)

Abgabe bis Donnerstag, den 13. Juni, um 12 Uhr.