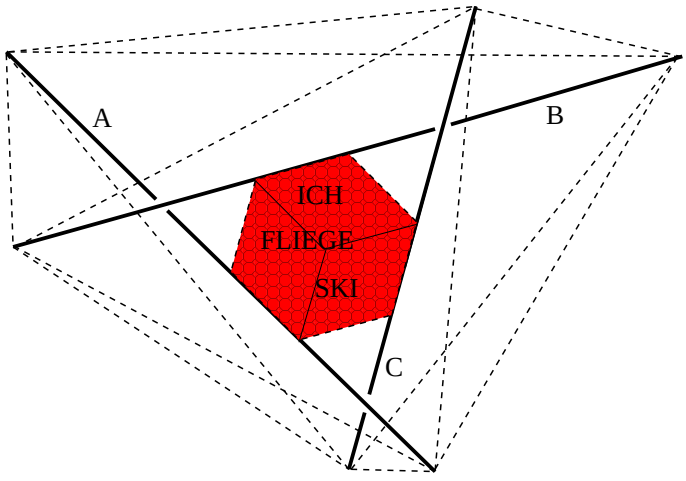
Prof. N. A'Campo Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung Infini I

13. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Bald wird das Skifahren durch Raumskifliegen im Euklidischen 3-Raum $E = (\mathbb{R}^3, s)$ abgelöst werden. Die Grundausrüstung besteht aus 3 Skiern $\{A, B, C\}$ und 12 Seilen. Der Ski A ist eine starre geradlinige Verbindungsstrecke seiner Endpunkte A_1, A_2. Genauso für die Skier B und C. Die 12 Seile verbinden paarweise die Endpunkte, die nicht bereits durch einen Ski verbunden sind. Der geübte Skifahrer beeinflusst mit seinem Können und Körper die Zugspannungen in den Seilen und zwar so, dass nie zwei Skier in eine Ebene geraten. Das Drachenfliegen ist dafür eine gute Vorbereitung. Mittels Änderungen der Zugspannungen wird das Fortbewegen bewirkt und beeinflusst. Die Beschichtung der Skier ist so, dass Gravitationswellen eingefangen und umdirigiert werden. Die Skier eines Tripels sind 5 Meter lang, und die bevorzugte Startposition ist so, dass das mittlere Fünftel jedes Skis 3 Kanten eines Einheitskubus bilden. Berechne für die Startposition die Zugspannung in den Seilen. Die Summe aller Spannungen betrage 12 Newton.



Aufgabe 2. Die Haltung eines Raumskifliegers ist umso besser je grösser der Inhalt des mitfliegenden Parallelepipeds, das drei seiner Kanten auf den Skiern hat, ist. Gibt es für einen Raumskiflieger mit 3 Skiern von 5 Meter Länge eine optimale Haltung? (Ein Parallelepiped ist ein Raumkörper mit 6 Seitenoberflächen, die Parallelogramme sind.)

Aufgabe 3. Ein Seil platzt! Kann man die 3 Skier auch mit 11 Seile so anhalten, dass nie zwei Skier in eine Ebene geraten.

Aufgabe 4. Seien $\{A, B, C, D_t\}$ Punkte in der Euklidischen Ebene $E = (\mathbb{R}^2, s)$. Seien $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Standardkoordinatenfunktionen. Es gelten $x(A) = y(A) = y(B) = 0, x(B) = 2, x(D) = \cos(t), y(D) = \sin(t), t \in \mathbb{R}$, und $y(C) > 0, (x(C) - x(B))^2 + ((y(C) - y(B))^2 = 4 = (x(C) - x(D))^2 + (y(C) - y(D))^2$. Der Kantenzug $[A, B, C, D_t, A]$ berandet je nach t-Wert ein Viereck oder zwei Dreiecke, die in entgegengesetzter Richtung umlaufen werden. Sei die $\phi(t)$ die Oberfläche des Vierecks oder die Summe der signierten Oberflächen der Dreiecke. Die signierte Summe kann man auf 4 Arten bilden (sprich: $+u+v$, $+u-v$, $-u-v$ oder $-u+v$). Für 2 Arten ist die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Die signierte Summe soll sogar so gebildet werden, dass die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Zeige, dass ϕ Minima und Maxima hat. Zeige, dass ϕ an der Stelle $t \in \mathbb{R}$ genau dann minimal oder maximal ist, wenn die 4 Punkte $\{A, B, C, D_t\}$ auf einem Kreis liegen. Formuliere den Satz von Ptolemäus.

Aufgabe 5. Ein Osterei läßt sich (bald) mit 4 Fingern einklemmen. Ist das Ei glatt und rutschig, dann ist es nur bei größter Vorsicht möglich, ein Ei fest im Griff zu haben. Ist keine Reibung zwischen Fingern und Eioberfläche möglich, dann übertragen die Finger die Kräfte senkrecht zur Eioberfläche. Zeige, dass man das Ei im Euklidischen 3-Raum nur dann fest im Griff hat, wenn die 4 Normalen am Ei durch die Berührungsstellen mit den Fingern im folgenden Sinne klamm-heimlich zusammenpassen. Wir sagen, daß vier Geraden $\{a, b, c, d\}$ in $\mathbb{R}^3$ zusammenpassen, wenn sie paarweise nicht in einer Ebene liegen, und wenn es mindestens 3 Geraden gibt, die a, b, c und d schneiden.

Mit den besten Wünschen für den Frühling und die vorösterliche Zeit.

Abgabe der Aufgaben bis Donnerstag, den Frühling 2001.