Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst affin, wenn für $p, q, t \in \mathbb{R}$ die Gleichheit $f(tp + (1-t)q) = tf(p) + (1-t)f(q)$ gilt. Für $t \in \mathbb{R}$ fest, stelle man sich vor, dass $r := tp + (1-t)q$ affiniert oder verwandt zu p und q ist. Eine affine Abbildung f respektiert also Verwandschaftsbeziehungen, genauer, ist r für t zu p und q verwandt, dann ist $f(r)$ für t zu $f(p)$ und $f(q)$ verwandt. Zeige, dass eine affine Funktion stetig ist.

Aufgabe 2. Seien $p, q, u, v \in \mathbb{R}$ mit $p \neq q$. Zeige, dass genau eine affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = u$ und $f(q) = v$ existiert. Wir bezeichnen diese affine Funktion mit $A_{p,q,u,v}$.

Aufgabe 3. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst konvex, wenn für $p, q \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ die Ungleichung $f(tp + (1-t)q) \leq tf(p) + (1-t)f(q)$ gilt. Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeige, dass für $p, q \in \mathbb{R}$ und $t \notin [0,1]$ die Ungleichung $f(tp+(1-t)q) \geq tf(p)+(1-t)f(q)$ gilt. Schliesse für $p, q \in \mathbb{R}, p < q$, und $r \in \mathbb{R}$, dass für $r \in [p,q]$ die Ungleichung $f(r) \leq A_{p,q,f(p),f(q)}(r)$ und für $r \notin [p,q]$ die Ungleichung $f(r) \geq A_{p,q,f(p),f(q)}(r)$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Für $p, q \in \mathbb{R}, p < q$, zeige, dass die Einschränkung von f auf $[p,q]$ beschränkt ist. Hinweis: für $r \in [p,q]$ gelten die Ungleichungen

$$A_{p-1,p,f(p-1),f(p)}(r) \leq f(r) \leq A_{p,q,f(p),f(q)}(r)$$

Aufgabe 5. Seien $A, B, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass A, B affin und f konvex ist. Wir nehmen an, dass für $r \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $A(r) \leq f(r) \leq B(r)$ gelten. Zeige, dass f affin ist.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Für ein $p \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Folge $n \in \mathbb{N}_{>0} \mapsto A_{p,p+\frac{1}{n},f(p),f(p+\frac{1}{n})}$ von affinen Funktionen. Für $r \in \mathbb{R}$ zeige, dass die Folge $(A_{p,p+\frac{1}{n},f(p),f(p+\frac{1}{n})}(r))_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent ist. Wir setzen $D^+(r) = \lim_{n\to\infty} A_{p,p+\frac{1}{n},f(p),f(p+\frac{1}{n})}(r)$.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Zeige, dass die Zuordnung $r \in \mathbb{R} \mapsto D^+(r) \in \mathbb{R}$ affin ist. Zeige, dass die affine Funktion D^+ und die Funktion f an der Stelle p gleichen Wert haben, und dass für $r \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $D^+(r) \leq f(r)$ zutrifft.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Betrachte die Folge $n \in \mathbb{N}_{>0} \mapsto A_{p-\frac{1}{n},p,f(p-\frac{1}{n}),f(p)}$ und konstruiere die affine Funktion D^-. Zei $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine affine Funktion derart, dass die Funktion D und die Funktion f an der Stelle p gleichen Wert haben, und dass für $r \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $D(r) \leq f(r)$ zutrifft. Zeige die Existenz von $s \in [0,1]$ mit $D = sD^+ + (1-s)D^-$.

Aufgabe 9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 10. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und sei $p \in \mathbb{R}$. Seien D^+, D^- wie in Aufgabe 6, 7 und 8. Sei $\kappa_f(p) := D^+(p+1) - D^-(p+1)$. Zeige $\kappa_f(p) \geq 0$. Berechne $\kappa_f(0)$ für die konvexe Funktion $f(x) = |x|$. Berechne $\kappa_g(0)$ für die konvexe Funktion $g(x) = x^2$. Berechne $\kappa_h(0)$ für die konvexe Funktion mit $h(x) = x^2, x \leq 0$, und $h(x) = x, x \geq 0$.

Aufgabe 11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige für $p, q \in \mathbb{R}, p \leq q$:

$$\sum_{r \in [p,q]} \kappa_f(r) \leq$$

$$(A_{q,q+1,f(q),f(q+1)}(q+1) - A_{q,q+1,f(q),f(q+1)}(q)) -$$
$$(A_{p-1,p,f(p-1),f(p)}(p) - A_{p-1,p,f(p-1),f(p)}(p-1))$$

Schliesse für ein $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, dass höchstens endlich oft für ein $r \in [p,q]$ die Ungleichung $\kappa_f(r) \geq \epsilon$ zutrifft. Schliesse, dass eine abzählbare Teilmenge $K_{p,q} \subset [p,q]$ existiert derart, dass für $r \in [p,q] \setminus K_{p,q}$ die Gleichheit $\kappa_f(r) = 0$ eintritt. Schliesse, dass eine abzählbare Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ existiert derart, dass für $r \notin K$ die Gleichheit $\kappa_f(r) = 0$ eintritt.