Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei E eine Menge mit 111 Elementen. Für $k \in \mathbb{N}$, sei P_k die Menge aller Teilmengen in E mit k Elementen. Sei R_k die Relation auf P_k, die durch $R_k := \{(x, y) \in P_k \times P_k \mid \#(x \cap y) \geq k - 1\}$ gegeben ist. Für welche k ist R_k eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2. Wieviele Äquivalenzrelationen existieren auf einer Menge mit 12 Elementen ? Wieviele dieser Äquivalenzrelationen haben 2 Äquivalenzklassen?

Aufgabe 3. Seien A und B zwei Äquivalenzrelationen auf einer Menge E. Sind $A \cup B$ oder $A \cap B$ Äquivalenzrelationen auf E?

Aufgabe 4. Auf $\mathbb{Z}$ erklären wir die Relation $R_{37} := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \in 37\mathbb{Z}\}$ wobei $37\mathbb{Z}$ die Menge aller Vielfachen von 37 ist. Ist R_{37} eine Äquivalenzrelation? Ist die Addition auf $\mathbb{Z}$ mit der Relation R_{37} verträglich? Ist die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ mit der Relation R_{37} verträglich? Wenn zwei mal die Antwort "Ja" zutrifft, dann erklären Sie auf der Menge E/R_{37} der Äquivalenzklassen der Relation R_{37} die induzierte Addition und induzierte Multiplikation. Ist E/R_{37} mit induzierter Addition und Multiplikation ein Körper?

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung mit $f(-n) = -f(n), n \in Z$, welche für $n \in \mathbb{N}$ durch $f(n) := \text{maximum}\{k \in \mathbb{N} \mid k^2 \leq 3n^2\}$ definiert ist. Zeige, dass die Menge $\{f(x + y) - f(x) - f(y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$ endlich ist.

Aufgabe 6. (Fortsetzung) Zeige, dass die Menge $\{f(f(x)) - 3x | x \in \mathbb{Z}\}$ endlich ist.

Aufgabe 7. (Fortsetzung) Erkläre, dass f eine reelle Zahl r definiert. Zeige: $r > 0$ und $r^2 = 3$.