Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $r \in \mathbb{N}$ sei D_r die Menge der rationalen Zahlen $D_r := \{\frac{2k+1}{2^r} \mid k \in \mathbb{N}, 2k+1 \leq 2^r\}$. Es gilt $D_0 = \{1\}, D_1 = \{1/2\}, D_2 = \{1/4, 3/4\}$ usw. Zeige für $r, s \in \mathbb{N}, r \neq s$, dass $D_r \cap D_s = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, bezeichnen wir mit $[a, b]$ das Intervall $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Für $r \in \mathbb{N}$, sei Δ_r die Vereinigung $\bigcup_{0 \leq \rho \leq r} D_\rho$ und sei $X_r := [0, 1] \setminus \Delta_r$. Auf X_r definieren wir die Relation $R_r := \{(a, b) \in X_r \times X_r \mid [\text{Minimum}\{a, b\}, \text{Maximum}\{a, b\}] \cap \Delta_r = \emptyset\}$. Zeige für $r \in \mathbb{N}$, dass R_r eine Äquivalenzrelation auf X_r ist. Zeige, dass die Anzahl der Äquivalenzklassen der Relation R_r gleich $\#\Delta_r$ ist.

Aufgabe 3. Eine Menge Z heisst abzählbar, wenn eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to Z$ existiert. Sei $D := \bigcup_{\rho \in \mathbb{N}} D_\rho$. Zeige, dass die Menge D abzählbar ist.

Aufgabe 4. Auf $X := [0, 1] \setminus D$ definieren wir die Relation $R := \{(a, b) \in X \times X \mid [\text{Minimum}\{a, b\}, \text{Maximum}\{a, b\}] \cap D = \emptyset\}$. Zeige, dass R eine Äquivalenzrelation auf X ist. Zeige, dass für $x \in X$ die Menge $\{x\}$ die Äquivalenzklasse von x für die Relation R ist. Es folgt, dass die Menge X und die Menge der Äquivalenzklassen der Relation R gleichmächtig sind.

Aufgabe 5. Die Potenzmenge einer Menge Z ist die Menge aller Teilmengen der Menge Z. Wir notieren sie mit $P(Z)$. Sei die Menge Z endlich. Zeige: $\#P(Z) = 2^{\#Z}$.

Aufgabe 6. Für eine Menge Z, sei ϕ eine Abbildung $\phi : Z \to P(Z)$. Wir definieren die Teilmenge $A := \{z \in Z \mid z \notin \phi(z)\}$ der Menge Z. Bedenke, dass A ein Element der Menge $P(Z)$ ist. Zeige: $A \notin \phi(Z)$. Hinweis: Wäre $A \in \phi(Z)$, dann würde ein $z \in Z$ mit $A = \phi(z)$ existieren. Mit der Definition der Teilmenge A könnten wir nun sowohl $z \in A$ als auch $z \notin A$ schliessen. Dieses ist absurd und die Annahme $A \in \phi(Z)$ ist zu verwerfen.

Aufgabe 7. Für eine Menge Z zeige, dass Z und $P(Z)$ nicht gleichmächtig sind. Zeige, dass die Potenzmenge $P(\mathbb{N})$ nicht abzählbar ist.

Aufgabe 8. Konstruiere eine injektive Abbildung $\phi : P(\mathbb{N}) \to [0, 1]$. Hinweis: Betrachte für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die Zahl $x_A := 0, x_0 x_1 x_2 \cdots$, wobei die i^{te} Ziffer x_i für $i \in A$ gleich 3 und für $i \notin A$ gleich 7 ist.

Aufgabe 9. (Fortsetzung von Aufgabe 4). Zeige, dass die Menge der Äquivalenzklassen der Relation R auf $X = [0, 1] \setminus D$ und die Menge D nicht gleichmächtig sind.