Prof. N. A'Campo Wintersemester 2004/2005

Übungen zur Vorlesung Infini I

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Eine *Teilfolge* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge $(a_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monotone Abbildung ist. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Sei Z die Menge derjenigen reellen Zahlen z, für die die Ungleichung $a_n > z$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ zutrifft. Zeige, dass die Menge Z nichtleer ist. Zeige, dass die Menge Z in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist. Sei $i \in \mathbb{R}$ das Infimum der Menge Z. Zeige, dass i Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Konstruiere eine Teilfolge $(a_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{\pi(n)} = i$.

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die beschränkt aber nicht in $\mathbb{R}$ konvergent ist. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens zwei Häufungspunkte hat. Zeige, dass in der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolgen $(a_{\pi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{\pi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{\pi_1(n)} \neq \lim_{n\to\infty} a_{\pi_2(n)}$ existieren.

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, für die jede Teilfolge $(a_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist. Zeige, dass für jedes $M \in \mathbb{R}$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid -M \leq a_n \leq M\}$ endlich ist.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}, n > 2$, zeige die Ungleichung:

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-2}}\frac{1}{\sqrt{n-1}}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Zeige, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n>0} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergent ist.

Aufgabe 5. Sei $\sigma(n)$ die Summe der Teiler von $n \in \mathbb{N}$. Ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n>0} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{n\sqrt{n}}$ konvergent?

Aufgabe 6. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n>0} \frac{\sigma(n)}{n^4}$ konvergent ist. Ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N},n>0} \frac{\sigma(n)}{n^k}$ für $k = 3$ oder $k = 2$ konvergent?