Prof. N. A'Campo Sommersemester 2005

Vorlesung Infini II, Freitag 9.4

Fundamentalsatz der Algebra

Satz: Sei $P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und vom Grad $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Dann existiert eine komplexe Zahl λ mit $P(\lambda) = 0$.

Der Satz wurde von C.F Gauss bewiesen. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $P(\lambda) = 0$ heisst Nullstelle des Polynoms $P(z)$.

Beweis: Sei $A := |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$ die Summe der Beträge der Koeffizienten. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq A + |a_0| + 1$. Dann gilt

$$|P(z)| \geq |z|^n - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \geq$$

$$|z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \geq$$

$$|z|^n - A|z|^{n-1} = (|z| - A)|z^{n-1} \geq$$

$$|z| - A \geq |a_0| + 1 > 0$$

Es folgt, dass das Polynom $P(z)$ keine Nullstelle im Komplement der Teilmenge $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq A + |a_0| + 1\} \subset \mathbb{C}$ hat.

Wir suchen nun notgedrungen eine Nullstelle in D.

Aus $0 \in D$, $P(0) = a_0$ und $|P(z)| \geq |a_0| + 1, z \notin D$ folgt

$$\text{Infimum}_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \text{Infimum}_{z \in D} |P(z)|$$

Da die Funktion $z \in D \mapsto |P(z)| \in \mathbb{R}$ stetig ist, und da jede Folge in D eine in D konvergente Teilfolge hat, schliessen wir dass ein λ in D existiert, derart dass gilt:

$$|P(\lambda)| = \text{Infimum}_{z \in D} |P(z)|$$

Es gilt

$$|P(\lambda)| = \text{Infimum}_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$$

Wir zeigen nun mit einem Widerspruchsbeweis, dass $P(\lambda) = 0$ gilt.

Dazu die Widerspruchsannahme: $P(\lambda) \neq 0$.

Wir entwickeln $P(\lambda + h), h \in \mathbb{C}$ nach Potenzen von h und erhalten:

$$P(\lambda + h) = P(\lambda) + b_k h^k + h^{k+1} Q(h)$$

wobei $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n, b_k \neq 0$, gelten und $Q(h)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten in h ist.

Es existiert ein $r \in \mathbb{R}, r > 0$, derart, dass für alle $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| = r$ gelten:

$|b_k h^k| < |P(\lambda)|$,

$|h^{k+1}Q(h)| \leq \frac{1}{2}|b_k h^k|$.

Wähle nun $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| = r$ und derart, dass gilt:

$$|P(\lambda) + b_k h^k| = |P(\lambda)| - |b_k h^k|$$

Dann gilt im Widerspruch mit $|P(\lambda)| = \text{Infimum}_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$ die Ungleichung:

$$|P(\lambda + h)| = |P(\lambda) + b_k h^k + h^{k+1}Q(h)| \leq$$

$$|P(\lambda) + b_k h^k| + |h^{k+1}Q(h)| =$$

$$|P(\lambda)| - |b_k h^k| + |h^{k+1}Q(h)| \leq$$

$$|P(\lambda)| - \frac{1}{2}|b_k h^k| < |P(\lambda)|$$