Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2009

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Konstruiere eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die nicht stetig ist, aber so, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto f(p+tv) \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 2. Konstruiere eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die nicht differenzierbar ist, aber so, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto f(p+tv) \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Seien $a, b, c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ drei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, deren Differentiale punktweise und paarweise linear unabhängig sind, und so dass für ein einziges $p \in \mathbb{R}^2$ Konstanten $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p > 0$ mit $\alpha_p(Da)_p + \beta_p(Db)_p + \gamma_p(Dc)_p = 0$ und $\alpha_p^2 + \beta_p^2 + \gamma_p^2 = 1$ existieren. Zeige, dass positive differenzierbare Funktionen $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(q)(Da)_q + \beta(q)(Db)_q + \gamma(q)(Dc)_q = 0$ und $\alpha(q)^2 + \beta(q)^2 + \gamma(q)^2 = 1, q \in \mathbb{R}^2$, existieren.

Eine Aufteilung der Ebene $\mathbb{R}^2$ in Linienscharen, die sich lokal als Niveaulinien von 3 Funktionen ohne kritische Punkte mit paarweise linear unabhängigen Differentialen beschreiben lassen, heisst 2-*dimensionales* 3-*Gewebe*. Für ein weiteres Studium der Gewebe ist das Gründerbuch dieser Theorie sehr zu empfehlen:

Wilhelm Blaschke und G. Bol, Geometrie der Gewebe: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **49**, Berlin : Springer, 1938.

Aufgabe 4. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 2. Sei $J : V \to V$ linear mit $J \circ J = -\mathrm{Id}_V$. Wir erklären für $u \in V$ und $\lambda = a+bi \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ das Produkt $\lambda u \in V$ wie folgt:

$$\lambda u := au + bJ(u)$$

Zeige, dass V mit der Multiplikation $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times V \mapsto \lambda u \in V$ ein komplexer Vektorraum ist, der wir mit V_J notieren.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Sei $A : V \to V$ $\mathbb{R}$-linear mit $\mathrm{Spur}(A)^2 < 4\mathrm{Det}(A)$. Zeige, dass ein $J : V \to V$ mit $J^2 = -\mathrm{Id}_V$ existiert, derart, dass $A : V_J \to V_J$ $\mathbb{C}$-linear ist. Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 6. Seien A, B, C, D vier Untervektorräume der Dimension 2 in einem reellen Vektorraum V der Dimension 4. Wir nehmen an, dass jeweils zwei der Unterräume V aufspannen. Fasse C auf als Graph einer Abbildung $X_C : A \to B$ und D als Graph einer Abbildung $X_D : B \to A$. Sei $X := X_D \circ X_C$. Wir nehmen an: $\mathrm{Spur}(X)^2 < 4\mathrm{Det}(X)$. Zeige, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : V \to \mathbb{C}^2$ existiert, derart, dass $\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(D)$ komplexe Unterräume in $\mathbb{C}^2$ sind. Gilt die Umkehrung?