Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2009

# Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis
## 4. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ Funktionen. Wir nehmen an, dass $f$ stetig ist, dass $g$ holomorph ist, und dass gilt: $f^2 = g$. Zeige, dass $f$ holomorph ist.

**Aufgabe 2**. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : U \to \mathbb{C}$ injektiv und holomorph mit $f(U) = V$. Zeige, dass die $f^{-1} : V \to U$ holomorph ist.

**Aufgabe 3**. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Wir definieren iterativ eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $U$: $f_0 := f$, für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_{n+1} := Df_n(1)$. Zeige, dass für jedes $p \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(p) \neq 0$ existiert.

**Aufgabe 4**. (Fortsetzung). Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $p \in U$ mit $f_n(p) = g_n(p), n \in \mathbb{N}$. Schliesse: $f = g$.

**Aufgabe 5**. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $G \subset U$ ein zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial G$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und auf $G$ nicht konstant. Zeige für $p \in G \setminus \partial G$: $|f(p)| < \mathrm{Sup}_{q \in \partial G} |f(q)|$.

**Aufgabe 6**. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ Funktion. Wir nehmen an, dass $f$ stetig ist, dass $g$ holomorph ist, und dass gilt: $g \neq 0$ und $fg = 0$. Zeige: $f = 0$.