Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2009

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis
6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit isolierten Singularitäten in U. Für $p \in U$, sei $R > 0$ so gewählt, dass die Einschränkung von f auf $B(p,R) \setminus \{p\}$ holomorph ist. Das Residuum von f in p ist definiert als das Wegintegral von $f dz$ über den orientierten Rand $\partial^+ B(p,R)$ von $B(p,R)$. Zeige, dass das Residuum von f in p nicht von der Wahl von R abhängt. Wir notieren das Residuum von f in p mit $\mathrm{Res}_p(f)$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei G ein Gebiet in U, derart, dass auf $\partial(G)$ keine Singularitäten von f liegen. Zeige, dass gilt:

Satz (Residuumsatz): $\int_{\partial^+(G)} f dz = \sum_{p \in U} \mathrm{Res}_p(f)$.

Aufgabe 3. (Anwendung) Für $R > 1$ sei $G_R := \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(p) \geq 0, |p| \leq R\}$. Berechne das uneigentliche Integral $\int_{\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$. Hinweis: Zeige für die holomorphe Funktion mit Singularitäten $f := \frac{1}{z^2+1}$

– $\mathrm{Res}_i(f) = \int_{\partial^+(G_R)} f dz$ hängt nicht von $R > 1$ ab.

– $\mathrm{Res}_i(f) = \lim_{R \to +\infty} \int_{\partial^+(G_R)} f dz = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$.

Aufgabe 4. Berechne das Wegintegral der Form $\frac{\log(1-z/5)}{\sin(z)} dz$ entlang $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ wobei $\gamma(t) = 4e^{2\pi i t} + \sin(40\pi t)/38 + i\cos(38\pi)/40$ gilt.

Aufgabe 5. Sei E der Euklidische 3-Raum. Sei $K \subset E$ die konvexe Hülle einer endlichen Menge. Wir nehmen an, dass das Innere von K nicht leer ist. Sei S_K die Randfläche von K. Statte S_K aus mit einem holomorphen Atlas A aus, so, dass die Euklidische Winkelmessung in jeder Kantenfläche von K mit den Winkelmessungen der Karten aus A übereinstimmt. Seien A und B zwei solchen Atlanten. Zeige, dass A und B holomorph oder anti-holomorph verträglich sind.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Sei K das Ikosaheder. Konstruiere eine bijektive holomorphe Abbildung von S_K nach $P^1(\mathbb{C})$, wobei man S_K mit einem Atlas A wie in Aufgabe 5 ausstattet.