Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $\theta : \mathrm{Mat}^{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SymMat}^{n\times n}(\mathbb{R})$ die quadratische Abbildung, die eine reelle $n \times n$-Matrix A die symmetrische Matrix $\theta(A) := A^{t}A$ zuordnet. Berechne das Differential von θ. Berechne den Rang von $(D\theta)_A, A \in \mathrm{Mat}^{n\times n}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}^{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\theta(A) = \mathrm{Id}_n$, dass $\mathrm{Rang}((D\theta)_A) = \mathrm{Dim}(\mathrm{SymMat}^{n\times n}(\mathbb{R}))$ gilt.

Aufgabe 3. Schliesse, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit in $\mathrm{Mat}^{n\times n}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(p) = x(p)y(p)(x(p)^2 + y(p)^2 - 1)$. Zeichne das Nullniveau $f^{-1}(0)$ von f. Finde " ohne zu rechnen" 5 kritische Punkte p in $f^{-1}(0)$, d.h. Punkte p in $f^{-1}(0)$ mit $\mathrm{Rang}((Df)_p) < Dim(\mathbb{R})$.

Aufgabe 5. Zeige, dass in jede beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(0)$ die Funktion f einen kritischen Punkt hat. Nun wissen wir, dass f mindestens 9 kritischen Punkte hat.

Aufgabe 6. Zeige, dass f genau 9 kritischen Punkte hat.

Aufgabe 7. Zeichne die Niveaulinien von f.

Aufgabe 8. Zeichne die Niveaulinien von $p \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x(p)^2 + y(p)^2/2 - 1)(x(p)^2 + y(p)^2 - 1) \in \mathbb{R}$.