Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I
12. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $plus := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \& z^2 = \bar{z}^2\}$ und $min := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \& z = \bar{z}\}$. Zeige, dass die drei Teilmengen $E_+ := \mathbb{C} \setminus plus, E_- := \mathbb{C} \setminus min$ und $C^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ paarweise diffeomorph zu einander sind.

Aufgabe 2. Zeige, dass ein Diffeomorphismus $\phi : \mathbb{C}^* \to E_+$ nicht holomorph ist.

Aufgabe 3. Definiere auf $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die holomorphe Funktion $p \in H \mapsto \phi(p) := z(p)^2\sqrt{z(p)^2 - 1})$ derart, dass gilt: $\phi(\sqrt{2}) = 2$. Bestimme $\phi(H)$. Zeichne $\phi(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4. Konstruiere einen holomorphen Diffeomorphismus $\phi : E_- \to E_+$. Hinweis: Wähle $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, 0 < b < 1$, und erweitere $p \in H \mapsto \phi(p) := az(p)^2\sqrt{z(p)^2 - b})$ vorerst stetig auf $H \cup \{t \in \mathbb{R} \| t| > 1\}$ und holomorph auf E_- mit der Spiegelungmethode von Schwarz. Sind a, b geschickt gewählt, dann gilt $\phi(E_-) = E_+$.

Aufgabe 5. Konstruire eine $\mathbb{Z}^2$-peiodische Morsefunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit 4 kritischen Punkte in $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x(p) < 1 \& 0 \leq y(p) < 1\}$.

Aufgabe 6. Zeige, dass keine $\mathbb{Z}^2$-peiodische Morsefunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit 3 kritischen Punkte in $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x(p) < 1 \& 0 \leq y(p) < 1\}$ existiert.

Aufgabe 7. Konstruire eine $\mathbb{Z}^2$-peiodische Morsefunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit 3 kritischen Werten.

Aufgabe 8. Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte holomorphe Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass M endlich viele Punkte hat.