Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

13. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei M der Raum aller Morsefunktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f'(0) > 0$ und $f'(1) < 0$. Wir statten M mit der C^2-Distanz $d(f,g)$ aus, d.h $d(f,g) := |f(0) - g(0)| + |f'(0) - g'(0)| + \mathrm{Max}\{|f''(t) - g''(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Zeige, dass eine Funktion $f \in M$ ungerade viele kritische Punkte hat.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Bestimme die Wegzusammenhangskomponenten von M.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante positive polynomiale Funktion. Zeige, dass f einen kritischen Punkt hat.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine nicht konstante positive polynomiale Funktion. Hat f ein Minimum? Hat f einen kritischen Punkt?

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine polynomiale Funktion mit $f(\{p \in \mathbb{C} \mid f'(p) = 0\}) = \{0,1\}$. Für $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, sei $E_t := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| + |p-1| = 1 + t\}$. Zeige für $t > 0$, dass $f^{-1}(E_t)$ eine zusammenhängende, kompakte 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Sei d der Grad von f. Zeige, dass $f^{-1}(]0,1[)$ genau d Zusammenhangskomponenten hat.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Zeige, dass $f^{-1}([0,1])$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Zeige, dass $f^{-1}([0,1])$ ein Baum ist, wobei $f^{-1}(\{0,\}])$ die Knoten sind und die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(]0,1[)$ die Kanten sind.

Aufgabe 9. (Fortsetzung). Konstruiere ein Polynom fünften Grades f mit $f(\{p \in \mathbb{C} \mid f'(p) = 0\}) = \{0,1\}$ derart, dass der Baum $f^{-1}([0,1])$ kombinatorisch gesprochen wie der Anfangsbuchstabe H von HOLOMORPH oder wie der Endungsbuchstabe E von SEMESTERENDE ist.