Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeige, dass die Eigenschaften:

(i) Das Bild $f(T)$ einer beschränkte Teilmenge T in $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt in $\mathbb{R}^m$.

(ii) Der Graph von f ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) der Aufgabe 1. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 3. Konstruiere ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum V der Dimension 3 und eine bilineare Abbildung $m_V : V \times V \to V$ so, dass das Tripel $(V, +_V, m_V)$ ein Körper ist.

Aufgabe 4. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Sei $\omega = ydx$. Wir nehmen an, dass das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ null ist. Zeige, dass die Einschränkung von γ auf $[0,1[$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeige, dass ein $w \in \mathbb{R}$ existiert so, dass für alle $p \in \mathbb{R}$ mit $f(p) = w$ gilt: $f'(p) \neq 0$.

Aufgabe 6. Konstruiere eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

Aufgabe 7. Konstruiere eine stetige, aber nicht rectifizierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.