Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ die Funktion $f(p) = \frac{1}{z(p)} + \frac{1}{1-\bar{z}(p)}$. Schreibe das Differential von f als $adz + b\bar{z}$, wobei a, b Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ sind.

Aufgabe 2. Hat die Form $\alpha := \frac{dz}{z}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine Stammfunktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$? Hat die Form $\beta := \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$? Hat die Form $\alpha + \beta$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$?

Aufgabe 3. Sei $K_P \subset \mathbb{C}$ die konvexe Hülle der Nullstellen eines Polynoms $P(z)$. Sei $q \in \mathbb{C}, q \notin K_P$. Konstruiere $h \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$, so dass für $k \in K_P$ gilt: $|q+h-k|-|q-k| > r|h|$. Schliesse, $|P(q+h)|-|P(q)| > \rho|h|$ für eine reelle Zahl $\rho > 0$. Zeige, dass das Differential der Zuordnung $p \in \mathbb{C} \mapsto |P(p)| \in \mathbb{R}$ an der Stelle q nicht verschwindet. Schliesse $P'(q) \neq 0$. Schliesse, dass die Nullstellen von $P'(z)$ in K_P liegen.

Aufgabe 4. Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z-\bar{z}}{i} > 0\}$. Bestimme $\{z \in \mathbb{C} \mid z^{37} \in H\}$ und $\{z^2 | z \in H\}$.

Aufgabe 5. Sei $R := \{x + yi \in \mathbb{C} \mid 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$. Bestimme $Q := \{z^3 \mid z \in R\}$ und $W := \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 \in R\}$.

Aufgabe 6. Sei Z die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, die an nur endlich vielen Stellen nicht differenzierbar sind und mit $|f'(t)| = 1$, wenn f an der Stelle $t \in [0,1]$ differenzierbar ist. Zeige, dass jede Folge in Z eine für die C^0-Norm konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 7. Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(0) = 0$ so, dass für alle $t, s \in [0,1]$ gilt $|g(t) - g(s)| \leq |t - s|$. Zeige, dass g Grenzwert für die C^0-Norm einer Folge in Z ist.