Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I
6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Zeige für $x, y \in \mathbb{C}$ mit $|x|, |y| < 1$, dass die Doppelreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{m=1}^{\infty} \min(n,m) y^m$$

konvergent ist.

Aufgabe 2. Für $p \in \mathbb{C}^2$ mit $|x(p)|, |y(p)| < 1$ setzen wir

$$f(p) := \sum_{n=1}^{\infty} x(p)^n \sum_{m=1}^{\infty} \min(n,m) y(p)^m$$

Zeige, dass die Funktion $f : D \times D \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Hier sind x, y die komplexen Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{C}^2$ und $D \times D := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid |x(p)|, |y(p)| < 1\}$.

Aufgabe 3. Berechne f. Zeige für $t, s \in \mathbb{C}$ mit $|t|, |s| < 1$ die Identität:

$$f(t,s) = \frac{ts}{(1-t)(1-s)(1-ts)}$$

Aufgabe 4. Sei $U := \{p\mathbb{C}^2 \mid x(p) \neq 1, y(p) \neq 1, x(p)y(p) \neq 1$. Zeige, dass

$$p \in U \mapsto \frac{x(p)y(p)}{(1-x(p))(1-y(p))(1-x(p)y(p))} \in \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion ist.

Aufgabe 5. Die Funktion $\mu : \mathbb{N} \to \{0, 1, -1\}$ von Möbius ist die Funktion, deren Quadrat die Indikatorfunktion der Quadratfreien Zahleni ist, d.h. $\mu(n)^2 = 1$ genau wenn n nicht durch ein Quadrat s^2 mit $s > 1, s \in \mathbb{N}$, teilbar ist, und weiter gilt für n quadratfrei $\mu(n) = 1$ genau wenn n sich durch eine gerade Anzahl von Primzahlen teilen lässt. Zeige, $\mu(mn) = \mu(n)\mu(m)$ falls m, n teilerfremd sind. Zeige, dass mit $M(p) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z(p)^n$ auf D eine holomorphe Funktion definiert ist.

Aufgabe 6. Zeige, dass mit

$$T(p) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{z(p)^n}{1 - z(p)^n}$$

auf D eine holomorphe Funktion definiert ist. Zeige: $T = z$, d.h. für alle $t \in D$ gilt:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{t^n}{1-t^n}$$

Aufgabe 7. Die Potenzreihe $M(t)$ hat den Anfang

$$M(t) = t - t^2 - t^3 - t^5 + t^6 - t^7 + t^{10} - t^{11} - t^{13} + t^{14} + t^{15} - t^{17} - t^{19} \cdots$$

Zeige für $t \in D$ die Identität:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} M(t^n)$$

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte holomorphe Funktion. Zeige, dass die Zuordnung $r \in \mathbb{R}{>}\, 0 \mapsto I_r := \int_{\partial B(p,r)} \frac{f(z)}{(z-p)^2} dz$ konstant ist. Setze $f'(p) = (Df)_p(1)$. Zeige:

- $\lim_{r\to\infty} I_r = 0$,

–$\lim_{r\to 0, r>0} I_r = 2\pi i f'(p)$.

Folgere $df = 0$ und den Satz von Liouville:

Satz. *Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte beschränkte und holomorphe Funktion ist konstant.*

Aufgabe 9. Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine polynomiale Funktion ohne Nullstellen. Zeige, dass die Funktion $1/P$ konstant ist. Schliesse, dass die polynomiale Funktion P konstant ist. Folgere den sogenannten Fundamentalsatz der Algebra:

Satz. *Ein Polynom $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$, $n > 0$, mit komplexen Koeffizienten hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.*

Aufgabe 10. Zeige das die Menge $\{\alpha \in [0, 2\pi] \mid \mathrm{Im}(e^{i\alpha n!}) \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ nicht abzählbar ist. Schliesse die Existenz einer Zahl $\alpha \in [0, 2\pi]$ mit $0 < \mathrm{Im}(e^{i\alpha n!}) < 1$ für all $n \in \mathbb{N}$.