Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : b(0,R) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ beschränkt und holomorph. Zeige, dass die Funktion $g : p \in b(0,R) \mapsto g(z(p)) := z(p)^2 f(z(p)) \in \mathbb{C}$ differenzierbar ist. Zeige, dass g holomorph ist.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Auf $b(0,R)$ ist die Funktion g durch eine Potenzreihe $\sum_0^\infty a_n z(p)^n$ gegeben. Zeige: $a_0 = a_1 = 0$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Sei $F : b(0,R) \to \mathbb{C}$ die Fortsetzung von f mit $F(0) = a_2$. Zeige, dass die Fortsetzung F auf $b(0,R)$ holomorph ist.

Zeige den Hebbarkeitssatz von Riemann:

Satz: *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und sei $f : U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Vorausgesetzt wird, dass f an der Stelle p lokal beschränkt ist. Dann hat f eine eindeutige holomorphe Fortsetzung $F : U \to \mathbb{C}$.*

Erklärungen: Ist für $p \in U$ eine Funktion $f : U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann heisst (in diesem Zusammenhang) die Stelle p eine Singularität. Kann man f auf U holomorph fortsetzen, dann ist die Singularität hebbar. Die lokale Beschränktheit ist offensichtlich eine notwendige Bedingung für die Hebbarkeit. Der Satz von Riemann sagt aus, dass die lokale Beschränktheit auch hinreichend ist.

Aufgabe 4. Sei V ein $2k$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seien $I, J : V \to V$ Endomorphismen mit $I^2 = J^2 = -\mathrm{Id}_V$. Zeige, dass I und J konjugiert sind. Zeige $\mathrm{Det}(I) = \mathrm{Det}(J) > 0$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Zeige, dass die Abbildung

$$(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times V \mapsto m_J(\lambda, v) := \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})v + \frac{1}{i}(\lambda - \bar{\lambda})J(V) \in V$$

den $\mathbb{R}$-Vektorraum V zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum macht. Wir notieren den $\mathbb{C}$-Vektorraum $(V, +, m_J)$ mit V_J. Wir nennen J eine komplexe Struktur auf V.

Aufgabe 6. Sei $V = \mathbb{C}$. Sei $I : V \to V$ gegeben durch die Multiplikation mit $i \in \mathbb{C} = V$. Wir nennen den Endomorphismus $J : V \to V$ mit $J^2 = -\mathrm{Id}_V$ gleichorientiert wie I, wenn die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(1) = 1$ und $\phi(J(1)) = I(1)$ eine positive Determinante hat. Ist J gleichorientiert wie I, dann heisst J linksorientiert.

Aufgabe 7. Sei $p \in \mathbb{C} = V \mid \mathrm{Im}(p) > 0$. Zeige, dass genau eine komplexe Struktur $J_p : V \to V$ mit $J_p(1) = p$ auf V existiert. Wir stellen fest, dass die sogenannte obere Halbebene $H := \{p \in \mathbb{C} = V \mid \mathrm{Im}(p) > 0\}$ via $p \in \mathbb{C} \mapsto J_p$ die Menge aller linksorientierten komplexen Strukturen auf $\mathbb{C} = V$ parametrisiert. Man könnte auch sagen, dass die obere Halbebene der Raum aller linksdrehenden komplexen Strukturen auf $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 8. Sei R der Raum aller polynomialen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $f, g \in R$ asymptotisch gleich sind, wenn $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$ gilt. Sei $R_2 \subset R$ die Äquivalenzklasse der Abbildung $t \mapsto t^2$. Sei $R_2^* \subset R_2$ der Raum aller f, die in $\mathbb{R}$ ohne Nullstelle sind. Sei $\nu : R_2^* \to H$ die Abbildung mit $f(\nu(f)) = 0$. Zeige, dass ν eine Bijektion ist. Die Umkehrung μ von ν ist eine Parametrisierung des Raumes R_2^*. Man könnte auch sagen, dass die obere Halbebene der Raum aller polynomialen Abbildungen ohne Nullstellen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^2} = 1$.

Aufgabe 9. In R_2^* gibt es Ansätze für Geometrie. Zum Beispiel, sind $f, g \in R_2^*$ dann bilden für $s \in [0,1]$ die Abbildungen $f_s := (1-s)f + sg$ einen Weg, der f und g verbindet. Beschreibe den Weg $s \in [0,1] \to H$ in H der durch $\nu(f_s)$ gegeben ist.

Aufgabe 10. Für $f, g \in R_2^*$ sei $A_{f,g} \in \mathbb{R}_{<0}$ maximal und $B_{f,g} \in \mathbb{R}_{>1}$ minimal gewählt derart, dass für alle $s \in]A_{f,g}, B_{f,g}[$ die Abbildung $f_s := (1-s)f + sg$ Element in R_2^* ist. Beschreibe in H den Weg $s \in]A_{f,g}, B_{f,g}[\mapsto \nu(f_s) \in H$.

Aufgabe 11. Die obere Halbebene hat viele Gesichter. Basel könnte das Stadtbild mit einem Vielgesicht schmücken. Für $p = m + \sigma i \in H$ sei G_p die Gaussverteilung auf $\mathbb{R}$ mit Mittelwert m und Streuung σ. Nun ist plötzlich die obere Halbebene der Raum aller Gaussverteilungen auf $\mathbb{R}$. Was ist wohl für zwei Gaussverteilungen G_p, G_q der Weg $s \in [0,1] \mapsto G_{\nu((1-s)\mu(p)+s\mu(q))}$. In Politik, Wirtschaft, Biologie, Psychologie und vielleicht auch in den Religionswissenschaften ist diesen Weg anwendungsreich.

Aufgabe 12. Für $p, q \in H$ seien $f = \mu(p), g = \mu(q)$. Wir definieren

$$d_H(p,q) := \frac{1}{2}\log(\frac{(1-A_{f,g})B_{f,g}}{A_{f,g}(1-B_{f,g})})$$

Zeige, dass d_H eine Distanzfunktion auf H ist.

Aufgabe 13. In dieser Aufgabe parametrisiert H die komplexen Strukturen auf $\mathbb{C}$. Seien $p, q \in H$. Die Frage ist, ob der Weg $s \in [0,1] \mapsto \nu((1-s)\mu(p) + s\mu(q)) \in H$, siehe Aufgabe 11, sich auch im Raum der komplexen Strukturen $\{J_p \mid p \in H\}$ beschreiben lässt? Wir starten mal einen Versuch: $s \in [0,1] \mapsto (1-s)J_p + sJ_q$. Etwas klappt nicht! In der Gruppe G aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ existiert genau eine 1-Parameter Untergruppe $s \in \mathbb{R} \mapsto X_s \in G$ mit $-J_pX_sJ_p = X_{-s}$, $-J_qX_sJ_q = X_{-s}$, $J_q = X_{-1}J_pX_1$. Der gesuchte Weg ist $s \in [0,1] \mapsto X_{-s}J_pX_s$. Kann man die Schar $(X_s)_{s\in\mathbb{R}}$ geometrisch beschreiben? Zum Beispiel: es existiert eine reelle Basis e_1, e_2 für $\mathbb{C}$ mit $J_p(e_1) = e_2, J_q(e_1) = Ae_2, A > 0$. Bezüglich e_1, e_2 hat X_s die Matrix $[e^{as}, 0; 0, e^{-as}]$ mit $a = log(A)$. Finde in H die Schar von Punkten $(p_s)_{s\in\mathbb{R}}$ mit $J_{p_s} = X_{-s}J_pX_s$.

Alles Gute für 2006!