Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $P \subset \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ endlich. Für $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ sei $w_{n,m}^P$ die Anzahl endlicher Folgen $W_1, W_2, \cdots, W_k$ mit $W_1 = (0,0), W_k = (n,m)$ und mit $W_{i+1} - W_i \in P, 1 \leq i < k$. Zeige, dass für $P = \{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ die Potenzreihe

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} w_{n,m}^P z_1^n z_2^m$$

lokal an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ die Funktion $\frac{1}{1-z_1-z_2-z_1z_2}$ darstellt.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $P = \{(1,0),(2,3),(0,1)\}$. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} w_{n,m}^P z_1^n z_2^m$$

lokal an der Stelle $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ eine rationale Funktion darstellt. Eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}^2$ ist eine Funktion der Form $\frac{A(z_1,z_2)}{B(z_1,z_2)}$, wobei A, B polynome sind.

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nirgendwo auf U lokal konstant. Zeige, dass das Bild $f(U)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 4. Für $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $f : b(0,r) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und mit $F(b(0,r) \subset b(0,R)$. Zeige $|f'(0)| \leq \frac{R}{r}$.

Aufgabe 5. Sei $f : H \to H$ holomorph. Für $p \in H$ zeige $|f'(p)| \leq \frac{\mathrm{Im}(f(p))}{\mathrm{Im}(p)}$.

Aufgabe 6. Zeige $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$. Hinweis: Integriere über den Rand eines Kreissektors mit Spitze in 0, Radius R und Scheitelwinkel $\frac{2\pi}{n}$ und verwende den Residuensatz.

Aufgabe 7. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge mit $\bar{p} \in U$ für alle $p \in U$. Sei $U^+ := \{p \in U \mid \mathrm{Im}(p) > 0\}$. Sei $f^+ : U^+ \to \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Fortsetzung auf $U^+ \cup (U \cap \mathbb{R})$, die auf $\cup(U \cap \mathbb{R})$ reellwertig ist. Zeige, dass f^+ eine holomorphe Fortsetzung auf U hat. Hinweis: Für $p \in U$ mit $p \notin U^+$ setze $f(p) = \bar{f(\bar{p})}$. Zeige für alle $p \in U$ und alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(p,r) \subset U$, dass das Wegintegral $\int_{\partial B(p,r)} f(z)dz$ verschwindet.

Aufgabe 8. Sei $s : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ die Spiegelung $s(p) := \frac{1}{\bar{p}}$. Sei $U \subset \mathbb{C}^*$ offen und s invariant, $f : U \cap D \to \mathbb{C}$ holomorph mit stetiger Fortsetzung auf $\{p \in U \mid |p| \leq 1\}$, die auf $\{p \in U \mid |p| = 1\}$ reellwertig ist. Konstruiere eine holomorphe Fortsetzung von f auf U.

Fortsetzungen wie in Aufgabe 7 oder 8 sind mit einer Spiegelung konstruiert. Diese Methode stammt von A. Schwarz und basiert auf dem sogenannten Spiegelungsprinzip von Schwarz. Die verwendete Spiegelungen sind anti-holomorph.