Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Lesungen am runden Tisch
Freitag, den 1. November 2002

Fakt 1. Seien P und Q zwei polygonale Gebiete in der Euklidischen Ebene. Wir zerscheiden P in endlich viele polygonale Gebiete $P_1, P_2, \cdots, P_k$. Ebenso Q in $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$.

a. Sind für $1 \leq i \leq k$ die Teilstücke P_i und Q_i kongruent, dann haben P und Q gleichen Flächeninhalt.

Frage 1. Gilt die Umkehrung von a.? Kann man zwei polygonale Gebiete in der Euklidischen Ebene P und Q mit gleichem Flächeninhalt so in endlich viele Teilstücke zerschneiden, dass entsprechende Teilstücke von P und Q kongruent sind?

Frage 2. Wir verschärfen die Frage 1: Sei Γ eine Untergruppe der Euklidischen Bewegungsgruppe der Ebene. Zwei polygonale Gebiete A und B heissen Γ-*kongruent*, wenn $B = \gamma(A), \gamma \in \Gamma$, gilt.

Sei T die Gruppe der Translationen. Sei T^- die Untergruppe, die von T und einer Punktspiegelung aufgespannt wird.

b. Kann man zwei polygonale Gebiete in der Euklidischen Ebene P und Q mit gleichem Flächeninhalt so in endlich viele Teilstücke zerschneiden, dass entsprechende Teilstücke von P und Q T-kongruent sind?

c. Kann man zwei polygonale Gebiete in der Euklidischen Ebene P und Q mit gleichem Flächeninhalt so in endlich viele Teilstücke zerschneiden, dass entsprechende Teilstücke von P und Q T^--kongruent sind?

Fakt 2. Hier sind die Antworten:

a. Ja, und die Umkehrung gilt auch: Satz von Bolyai-Gerwien.

b. Nein, Satz von Hadwiger-Glur.

c. Ja, Folgerung des Satzes von Hadwiger-Glur.

Frage 3. Definiere für polygonale Gebiete in der Euklidischen Ebene eine *neue Grösse* J, die für je zwei stücksweise T-kongruente Gebiete übereinstimmt. Dabei heisse die *Grösse* J *neu*, wenn es polygonale Gebiete P und Q gibt, die zwar den gleichen Flächeninhalt haben, aber für die $J(P) \neq J(Q)$ gilt.

Frage 3 (und auch 4) ist Teil des Satzes von Hadwiger-Glur. Nun ist die optimistische Frage erlaubt:

Frage 4. Kann man zwei polygonale Gebiete in der Euklidischen Ebene P und Q mit gleichem Flächeninhalt und übereinstimmender J-Grösse so in endlich viele Teilstücke zerschneiden, dass entsprechende Teilstücke von P und Q T-kongruent sind?

Frage 5. Wie Frage 4 für die Gruppe T^j, Gruppe aufgespannt von T und einer Drehung um $\frac{2\pi}{3}$.

David Hilbert stellte in seinem berühmten Vortrag beim Internationalen Mathematikerkongress im Jahre 1900 eine Reihe wichtiger ungelöster Probleme vor, siehe F. Browder (Ed.), Mathematical developements arising from Hilbert Problems, Proc. Symp. Pure Math. 28 part. 1,2, AMS, 1976. Das 3. Problem kann man so formulieren: Sind je zwei Polyeder mit gleichem Volumen zerlegungsgleich? Das heisst: Kann man immer erst das eine Polyeder in polyedrische Teile schneiden und dann das andere Polyeder aus diesen Teilen wieder zusammensetzen?

Dieses Problem wurde von Max Dehn [D] im selben Jahr gelöst, was zu neuen Fragen und weiteren Verallgemeinerungen führte. Zum Beispiel ist diese Frage für Polyeder in Euklidischen Räumen der Dimension grösser 4 und in hyperbolischen Räumen der Dimension grösser 2 noch immer ungelöst.

Fazit: Studiere *Puzzleäquivalenz*, lese zum Beispiel [N].

Literatur: (sehr unvollständig und zufällig)

Hilbert's Third Problem, V.G. Boltianskii, Wiley 1978.

[D], Max Dehn, Math. Ann. **55** (1901) 465–478.

[N], Walter D. Neumann, Hilbert's 3rd Problem and Invariants of 3-manifolds, Geometry & Topology Monographs, Volume 1: The Epstein Festschrift, 383–411, auch in arXiv:math.

Robert M. French. The Banach-Tarski theorem. The Mathematical Intelligencer, **10** (1988) 21-28.

Boltyanskii, Equivalent and equidecomposable figures, in Topics in Mathematics published by D.C. HEATH AND CO., Boston.

The Banach-Tarski Paradox, by Stan Wagon, 1985, Cambridge University Press.

C. S. Sah, Hilbert's Third Problem: Scissor Congruence, Res. Notes in Math. **33** Pitman 1979.

L. Fejes Toth, Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum, Grundlehren Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXV, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953.

Alexander Lubotzky, Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures, Birkhäuser, Basel, 1994.

H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, Grundlehren Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XCIII, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1957.