Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Lesungen am runden Tisch

Freitag, den 15. November 2002

Fakt 1. Auf der Einheitssphäre S^2 im Euklidischem 3-dimensionalen Raum gelten Grosskreise als die *Geraden* der sphärischen Geometrie. Zwei verschiedene nicht antipodale Punkte $A, B \in S^2$ sind genau mit einer Gerade G inzident, die durch A, B in zwei Teilstücke zerlegt wird. Eines davon heisst *langes Segment*, da es Paare antipodaler Punkte enthält, das andere *kurzes Segment* und wird mit $[A, B]$ notiert.

Frage 1. Erkläre eine *Längenmessung* für Segmente und eine *Winkelmessung* für Sektoren. Übertrage Sätze der Euklidischen 2-dimensionalen ebenen Geometrie in die 2-dimensionale sphärische Geometrie.

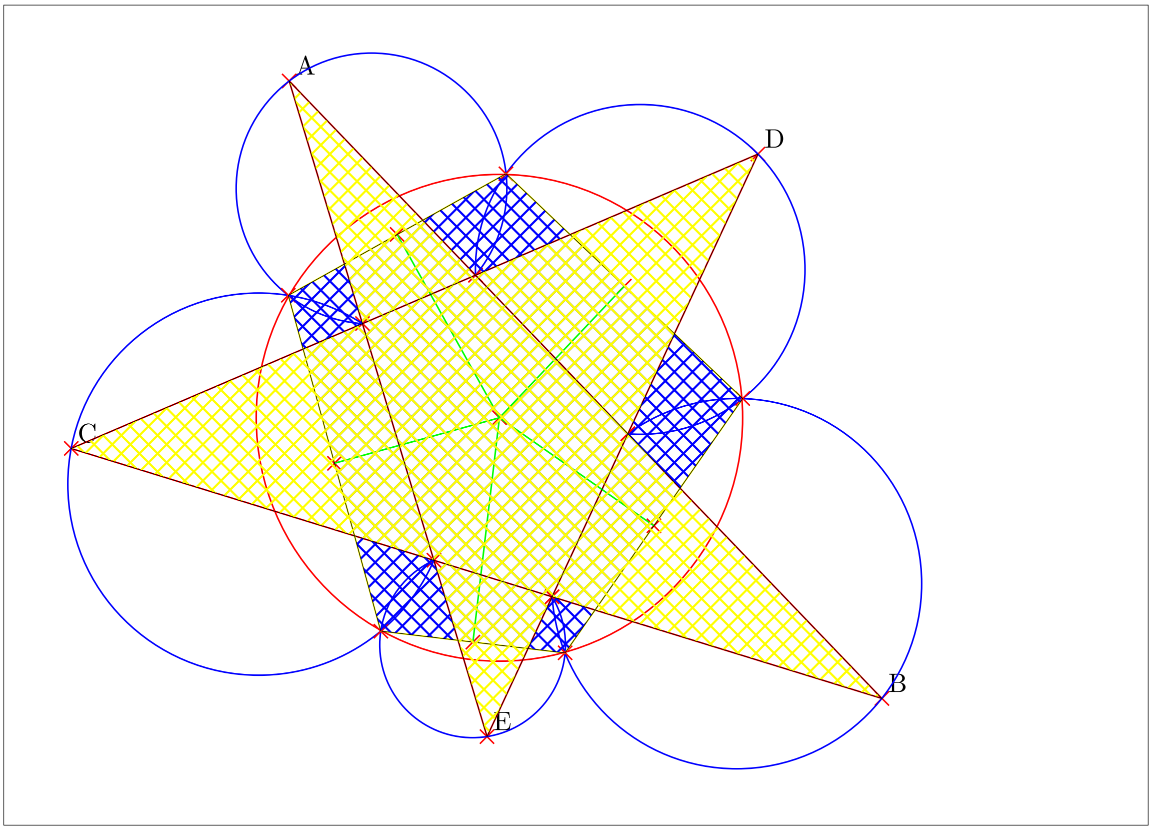
Frage 2. Sei (A, B, C) ein Dreieck auf S^2 mit Kanten $[A, B], [B, C], [C, A]$. Seien α, β, γ die Winkel und sei $v(A, B, C) := \alpha+\beta+\gamma-\pi$. Für ein polygonales Gebiet P, dessen Rand ein Zug von kurzen Segmente ist, und dessen Inneres in Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k$ aufgeteilt ist, erklären wir $v(P) := \sum_{i=1}^{k} v(\Delta_i)$. Zeige, dass $v(P)$ nicht von der gewählten Zerlegung von P in Dreiecke abhängt.

Fakt 2. Satz von Bolyai-Gerwien für die 2-dimensionale sphärische Geometrie: Die Zuordnung $P \mapsto v(P) \in \mathbb{R}$ ist die einzige zerlegungsadditive Grösse mit $v(S^2) = 4\pi$.

Frage 3. Die politische Führung in China ist in dieser Woche verjüngt worden. Im Aufsatz von Alain Connes mit sehr interessanten Ergebnissen und noch interessanteren Pespektiven: siehe `arXiv:math:QA/0211199`, ist auch die folgende Frage von Präsident Jiang Zemin, die er im Jahr 2000 in Beijing an seine Gäste gestellt hat, beschrieben. Siehe auch: Kin Y. Li, *Concyclic Problems*, Mathematical Excalibur, **6** (2001), 1, wo berichtet wird, dass Präsident Jiang Zemin diese Frage im Jahr 2001 an Studenten in Macau gestellt hat.

Sei $Z := (A, B, C, D, E, A)$ der geschlossene Streckenzug, der entlang den Diagonalen eines ebenen Fünfecks (A, D, B, E, C) verläuft. Zu der Ecke A, entsprechend zu B, C, D, E, sei K_A, entsprechend K_B, K_C, K_D, K_E, der Umkreis des Dreiecks mit Ecke A, das Abschluss einer Zusammenhangskomponente des Komplements von Z ist. Die Kreise K_A, K_B und entsprechend $K_B, K_C \cdots K_E, K_A$ haben einen Schnittpunkt $S_{A,B}$, entsprechend $S_{B,C}, \cdots, S_{E,A}$, der nicht auf Z liegt. Zeige, dass die 5 Punkte $S_{A,B}, S_{B,C}, \cdots, S_{E,A}$ auf einem Kreis liegen.

Siehe Figur, die mit DRGENIUS,
`http://packages.debian.org/unstable/math/drgenius.html/`, gemacht ist.


A
D
C
B
E