Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Lesungen am runden Tisch

Freitag, den 6. Dezember 2002

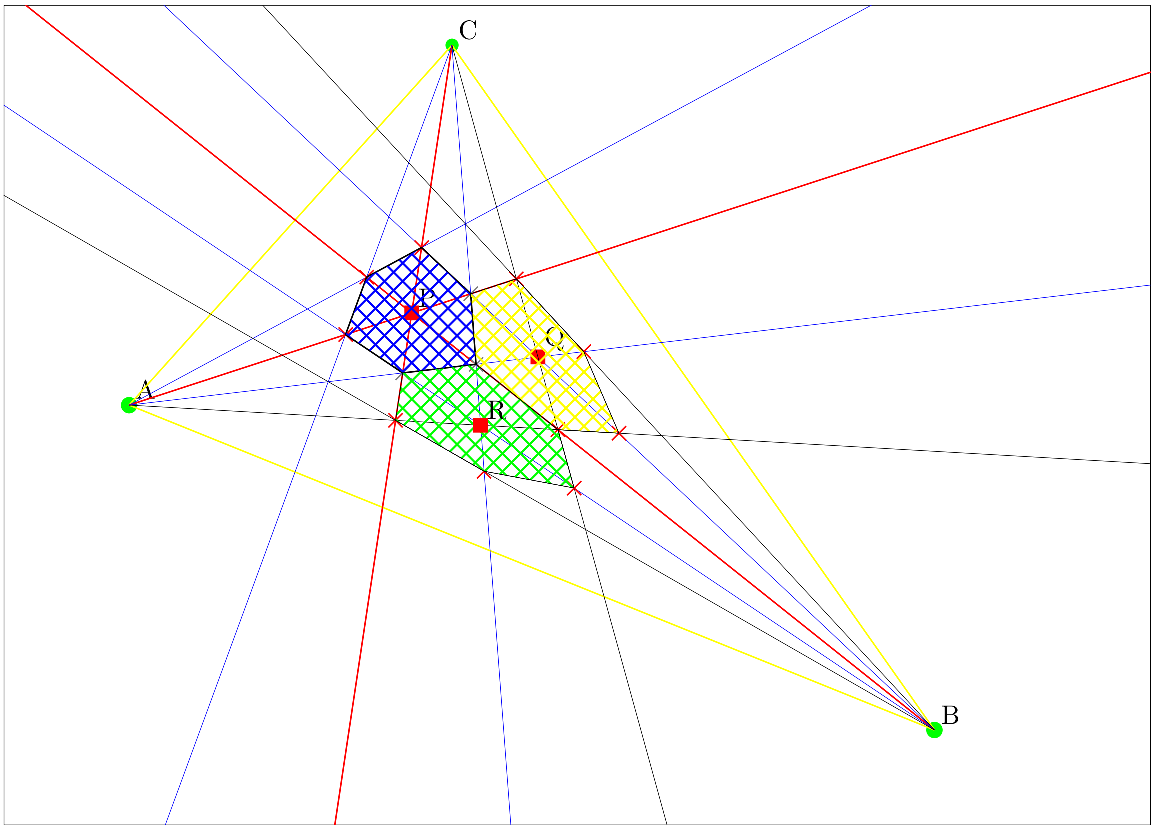
Fakt 1. Die Euklidische Ebene ist für uns ein vertrautes Objekt. Unsere Füsse berühren eine Euklidische Ebene, unser Kopf, etwas abgehoben, hat etwas Übersicht. Unheimlich ist es, dass die Ebene so gross ist. Die sphärische Geometrie hat ein sehr übersichtliches Modell: es lässt sich umarmen.

Fakt 2. Die Euklidische Ebene lässt sich in der sphärischen Geometrie realisieren: sei S die 2-dimensionale Sphäre; die Ebene hat als Punktmenge $S \setminus \{N\}$, wobei $N \in S$ fest gewählt ist; eine Gerade der Geometrie ist die Spur eines sphärischen Kreises durch N auf $S \setminus \{N\}$; die Winkelmessung ist die sphärische; die Längenmessung ist etwas versteckter.

Frage 1. Definiere auf $S \setminus \{N\}$ eine einfach transitive, winkeltreue Wirkung der Euklidischen Bewegungsgruppe der Euklidischen Ebene, so dass Geraden auf Geraden abgebildet werden. Erkläre eine Längenmessung. Hinweis: die stereographische Projektion.

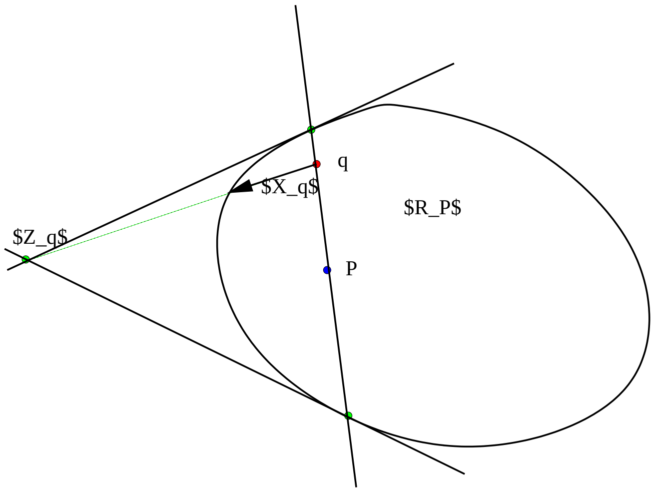
Fakt 3. Nun haben wir für die Euklidische Ebene ein Modell, das übersichtlich ist und sich auch umfassen lässt. Etwas Vorsicht ist bei Punkt N, der nicht zu der Geometrie gehört, geboten. Auch ist der Einsatz eines Lineals erschwert. Kreise mit Zirkel ziehen ist leicht, aber der Mittelpunkt ist etwas verrutscht!

Fakt 4. Die Euklidische Ebene lässt sich im Inneren jedes Dreiecks der Euklidisschen Ebene realisieren! Es existieren im Inneren des Dreiecks beliebig feinmaschige Sechseckpflasterungen. Die Sechsecke sind speziell: die 3 Diagonale sind konkurrent, folglich ist nach dem Satz von Charles Julien Brianchon, geboren am 19 Dezember 1783 in Sèvres, Frankreich, verstorben 29 April 1864 in Versailles, Frankreich, siehe Figur und MAPLE-Skripten in
`http://www.math.rutgers.edu/z̃eilberg/PG/Brianchon.html`,
und natürlich auch das Buch *PLANE GEOMETRY* $: \cdots$, SHALOSH B. EKHAD, XIV (2050) in Vorausgabe bei
`http://www.math.rutgers.edu/z̃eilberg/GT.html`,
eine Ellipse eingeschrieben, und somit erhalten wir eine konforme Struktur mit Z^2 Symmetrie. Es folgt nach dem Riemannschen Abbildungssatz, dass das Innere mit dieser konformen Struktur die Euklidische Geometrie realisiert. Siehe Figur.


C
P
Q
A
R
B

Noch allgemeiner ...

Fakt 5. Im Inneren eines konvexen ebenen Kantenzuges lebt eine Geometrie. Statt Kantenzug, kann man auch eine geschlossene konvexe Kurve nehmen. Erkläre Geraden, Kreise, etc $\cdots$. Nun haben wir sehr viele übersichtliche ebene Geometrien.



Fakt 6. Sei G eine beschränkte konvexe Menge mit glattem Rand in der orientierten affinen reellen Ebene. Sei $P \in R := G \setminus \partial G$. Der Punkt P definiert auf $R_P := R \setminus \{P\}$ ein Vektorfeld X_P: Für $q \in R_P$ seien A_q, B_q die Schnittpunkte der Gerade durch P und q mit ∂G. Sei Z_q der Schnittpunkt der Tangenten an ∂G in A_q, B_q. Nun ist $X_{P,q}$ der Vektor, der von der Gerade durch q und Z_q getragen wird, der in q seinen Fuss hat, der seinen Kopf auf ∂G hat und der in der Reihenfolge $[P, q], X_{P,q}$ die Orientierung der Ebene liefert. Das Wunderbare ist, dass alle Integralkurven der Differentialgleichung des Vektorfeldes X_P sich schliessen. Man könnte, um eine Geometrie in R einzurichten, die Integralkurven der Vektorfelder X_P als Kreise der Geometrie betrachten.

Fakt 7. Eine Geometrie im Inneren einer bestimmten Klasse von konvexen Kurve erfüllt 80% der Axiome von Euklid. Diese Geometrie ist die sogenannte *nicht-euklidische Geometrie* oder die sogenannte *hyperbolische Geometrie*. Welche konvexen Kurven?

Fakt 8. Die hyperbolische Geometrie ist auch da präsent, wo man sie weniger erwartet.

Zum Beispiel die Menge G der Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $W_{a,\sigma}$ mit Mittelwert $a \in R$ und Streuung $\sigma \in R_{>0}$ ist mit einer in der Wahrscheinlichkeitstheorie natürlichen Distanzfunktion D ausgestattet. Das Paar (G, D) ist isometrisch zur hyperbolischen Ebene. Hinweis: die Gruppe der affinen Substitutionen $x \in R \mapsto \lambda x + t \in R, \lambda \in R_{>0}, t \in R$, wirkt einfach transitive auf G;

berechne D.

Das Spektrum S der maximalen Ideale des Ringes $R[t]$ ist eine disjunkte Vereinigung $S = S_R \cup S_C$; S_R besteht aus den Idealen mit Quotientenkörper R und S_C aus den Idealen mit Quotientenkörper C.

Das Stratum S_R ist mit einer 3-Punktfunktion $f(A, B, C)$ ausgestattet, so dass das Paar (S_R, f) die reelle affine Gerade R mit der Funktion $(x, y, z) \mapsto (z - x)/(y - x)$ ist. Die Definition der 3-Punktfunktion $f(A, B, C)$ ist wie folgt: die Ideale A, B, C kann man als Hauptideale $A = (t - a), B = (t - b), C = (t - c), a, b, c \in R$ darstellen; $f(A, B, C) := w_A(B)/w_A(C)$, wobei $w_A(B)$ die Auswertung von $t - a$ in der Nullstelle von $t - b$ ist, dito für $w_A(C)$.

Das Stratum S_C ist mit einer 2-Punktfunktion $D(A, B)$ ausgestattet, so dass $\log(D)$ eine Distanz auf S_C ist, und das Paar $(S_C, \log(D))$ isometrisch zur hyperbolische Ebene ist. Die Definition der 2-Punktfunktion $D(A, B)$ ist wie folgt: seien $A = (t^2 + a_1 t + a_2), B = (t^2 + b_1 t + b_2)$; Die Polynome $t^2 + a_1 t + a_2$ und $t^2 + b_1 t + b_2$ haben keine reellen Nullstellen; Seien $s_{\min} < s_{\max}$ zwei reelle Zahlen s derart, dass das Polynome $s((t^2 + a_1 t + a_2) + (1 - s)(t^2 + b_1 t + b_2)$ reelle Nullstellen hat. Es gilt $s_{\min} < 0 < 1 < s_{\max}$; setze

$$D(A, B) := \frac{(1 - s_{\min}) s_{\max}}{-s_{\min}(s_{\max} - 1)}$$

Es ist instruktiv, die Nullstelle mit positivem Imaginärteil des Polynoms $t \mapsto s((t^2 + a_1 t + a_2) + (1 - s)(t^2 + b_1 t + b_2)$ für $s_{\min} < s < s_{\max}$ graphisch in Abhängigkeit von s darzustellen.