Algorithmische Topologie

Lektion 5. JSJ-Zerlegung.

5.1. 3-Mannigfaltigkeiten mit Randmuster.

Eine 3-Mannigfaltigkeit mit Randmuster ist eine 3-Mannigfaltigkeit M mit einem Graphen $\Gamma \subset \partial M$. Jede 3-Mannigfaltigkeit kann als eine 3-Mannigfaltigkeit mit leerem Randmuster betrachtet werden. Sei (M, Γ) eine 3-Mannigfaltigkeit mit dem Randmuster Γ. Eine Fläche $F \subset M$ heißt *proper*, wenn $F \cap \partial M = \partial F$ und die Kurve ∂F in allgemeiner Lage ist, d.h sie geht nicht durch die Eckpunkte von Γ und schneidet die Kanten transversal. Wir sagen, daß eine Untermenge $X \subset M$ *rein* ist, wenn $X \cap \Gamma = \emptyset$. Eine Isotopie $F_t : X \to M$ ist rein, wenn $f_t(X)$ für jedes t rein ist.

Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller inkompressiblen Tori in M, und sei $\mathcal{K}$ die Menge aller reinen inkompressiblen, randinkompressiblen Kreisringe in M.

Definition. Eine reine Fläche $F \in \mathcal{T} \cup \mathcal{K}$ heißt *grob*, wenn jede andere Fläche $G \in \mathcal{T} \cup \mathcal{K}$ zu einer mit F disjunkten Fläche G' rein isotop ist.

Ein endliches System $\{F_1, \ldots, F_n\}$ von disjunkten Flächen aus $\mathcal{T} \cap \mathcal{K}$ heißt *maximal*, wenn das folgende gilt:

1. Die Flächen sind grob;

2. Sie sind paarweise nicht parallel;

3. Jede andere grobe Fläche $G \in \mathcal{T} \cup \mathcal{K}$, die zu den Flächen F_i disjunkt ist, ist zu einer Fläche F_i parallel.

Satz 5.1. *Jede irreduzible randirreduzible 3-Mannigfaltigkeit M mit Randmuster Γ enthält ein maximales System von disjunkten groben Tori und Kreisringen. Das maximale System ist eindeutig bestimmt (modulo reiner Isotopie).*

Beweis. Die Existenz eines maximalen Systems folgt aus dem ersten Endlichkeitssatz. Wir fangen mit einer groben Fläche $F_1 \subset M$ an. Dann fügen wir neue disjunkte nicht-parallele grobe Flächen hinzu, solange es möglich ist. Nach dem Endlichkeitssatz ist dieser Prozeß endlich.

Eindeutigkeit. Seien $(F_1, \ldots, F_n)$ und $(G_1, \ldots, G_n)$ zwei maximale Systeme. Rücken wir G_1 von allen Flächen F_i ab. Da das System $(F_1, \ldots, F_n)$ maximal ist, ist G_1 parallel zu einer Fläche F_i. Und so weiter.

5.2. Elementare Bewegungen.

Es scheint, daß der Beweis beendet ist, aber es geht nicht so leicht. Warum kann man G_1 *gleichzeitig* von allen Flächen abschieben? (Man kann sich an die Borromäischen Ringe erinnern). Um dieses Problem zu lösen, führen wir *elementare Bewegungen* ein. Seien F, G zwei Flächen aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{K}$.

1. Scheibenverschiebung. Nehmen wir an, daß $F \cap G$ eine geschlossene Kurve C enthält, die eine Scheibe D auf G berandet. Wir können annehmen, daß D eine innerste Scheibe ist, d.h. sie keine weitere Kurven enthält. Da F inkompressibel ist, berandet C auf F auch eine Scheibe D_1. M ist irreduzibel, deher berandet die Sphäre $D \cap D_1$ einen Ball X. Wir schieben D durch X auf die andere Seite von F, siehe Fig. 1.

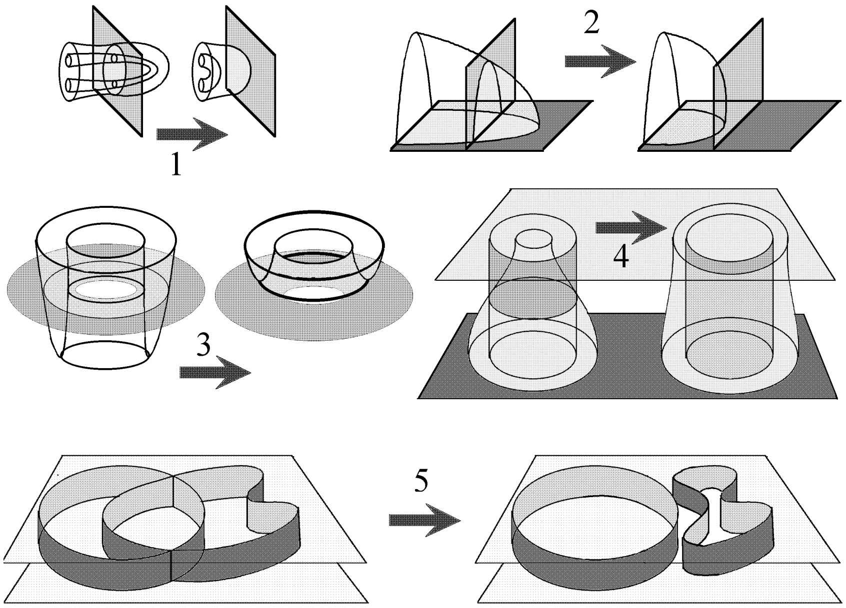

Figure 1: Fünf elementare trennende Bewegungen

2. Halbscheibenverschiebung. Dasselbe, aber D ist eine äußerste Halbscheibe.

Bewegungen 1,2 lassen uns alle triviale Kreise und Bögen beseitigen. Um nicht-triviale Kreise zu eliminieren, brauchen wir zwei weitere Bewegungen.

3. Innere Kreisringsverschiebung. Nehmen wir an, daß $F \cap G$ keine triviale Kreise und Bögen enthält. Sei G_1 ein Kreisringsflicken von G, so daß G_1 zu einem Kreisring $F_1 \subset F$ parallel ist. Wir schieben G_1 auf die andere Seite von F durch den Vollring X, der von F_1 und G_1 berandet ist.

4. Externe Kreisringsverschiebung. Dasselbe, aber G_1 hat eine Randkomponente auf ∂M.

Nicht-triviale Bögen in $F \cap G$ werden durch die letzte Bewegung beseitigt.

5. Bandverschiebung. Nehmen wir ein, daß G einen Bandflicken G_1 besitzt (ein Bandflicken ist ein Scheibenflicken, der zwei Bögen auf F und zwei Bögen auf ∂M hat). Die Verschiebung besteht aus einer Isotopie, die G_1 durch F hindurch deformiert.

Satz 6.2. *Seien F, G zwei Flächen aus $\mathcal{T} \cup \mathcal{K}$, so daß G zu einer disjunkten Fläche isotop ist. Dann existiert eine Folge von Bewegungen 1-5, die G disjunkt zu F macht.*

Beweis. SCHRITT 1. Nehmen wir an, daß es eine Fläche F' gibt, die zu G disjunkt und zu F parallel ist. Dann ist der Raum W zwischen F und F' zu $F \times I$ homöomorph. Wir können annehmen, daß alle mögliche Bewegungen 1,2 schon gemacht sind. Dann sind alle Flicken von G entweder Kreisringe oder

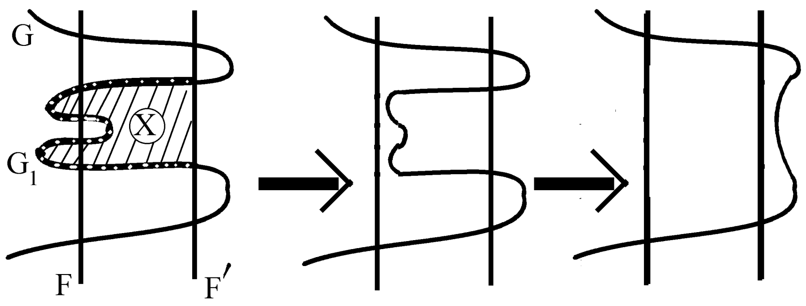

Figure 2: Jede elementare Bewegung von G_1 durch F' ist eine Kombination etlichen elementaren Bewegungen von G durch F und elementaren Bewegungen von G_1 durch F', die weit von F sind.

Bänder. Jeder Kreisring in W, der beide Randkurven auf F hat, ist parallel zu einem entprechenden Kreisring auf F. Deshalb sind wir imstande, Bewegung 3 auszufüren. Eine ähnliche Prozedur ist möglich, wenn wir einen Kreisring mit nur einer Randkurve auf F haben oder ein Band: man kann Bewegung 4 oder 5 anwenden. Da jede Bewegung die Anzahl der Schnittkurven in $F \cap G$ vermindert, bekommen wir schließlich disjunkte Flächen.

SCHRITT 2. Nehmen wir an, daß es eine Fläche F' gibt, die zu F parallel ist und von der G durch Bewegungen 1-5 getrennt werden kann. Die Spur X jeder Bewegung, die einen Flicken G_1 von G durch F' schiebt, ist entweder ein Ball oder ein Vollring. Wir verwenden X anstatt W oben, um vorher G_1 von F durch ähnliche Bewegungen zu befreien (siehe Fig. 2) und vollenden erst danach unsere Bewegung.

SCHRITT 3. Seien F, F' isotope Flächen. Dann gibt es eine Folge $F_0, \dots, F_n$ von Flächen, so daß $F' = F_0, F = F_n$ und für jedes $i, 0 \leq i < n$, F_i parallel zu F_{i+1} ist.

Sei $h_t : F \to M, t \in I$, eine Isotopie, die F nach F' überführt. Wir zerlegen I in so kleine Strecken $I_k = \{t : \varepsilon_k \leq t \leq \varepsilon_{k+1}\}, 0 \leq k < m-1$, daß für $t \in I_k$ die Fläche $h_t(F)$ sich im Innern einer regulären Umgebung $N \approx F \times I$ von $h_{\epsilon_k}(F)$ befindet. Bezeichnen wir $h_{\varepsilon_k}(F)$ durch F_{2k} und eine Randkomponente von N durch F_{2k+1}. Dann sind sowohl die Flächen F_{2k}, F_{2k+1} parallel für jedes k, als auch die Flächen F_{2k+1}, F_{2k+2}. Siehe Fig. 3. Die gewünschten Flächen sind $F_i, 0 \leq i \leq 2m = n$.

Die Schritte 1-3 lassen uns einen offensichtlichen Induktionsbeweis für Satz 5.2 vorschlagen, da jede elementare Bewegung von F durch G keine anderen Flächen berührt, die zu F, G disjunkt sind.

5.3. Drei Typen von JSJ-Kammern.

Die Tori und Kreisringe des maximalen JSJ-Systems für M zerlegen M in Teile, die JSJ-Kammern genannt werden. Jede Kammer hat ein Randmuster, das aus dem vererbten Randmuster von M und den Rändern von Kreisringen des Systems besteht. So ist jede Kammer Q_i eine 3-Mannigfaltigkeit mit Randmuster. Es stellt sich heraus, daß genau drei Type von Kammern existieren

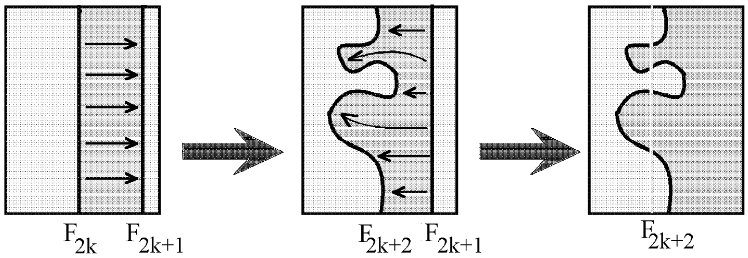

Figure 3: Hin und her Schwanken

können.

Wir sagen, daß ein Kreisring $A \subset \partial Q_i$ halbrein ist, wenn $A \cap \Gamma$ aus einigen Kopien des Mittelkreises besteht. Ein inkompressibler Kreisring $A \subset Q_i$ ist *wesentlich*, wenn er nicht zu einem halbreinen Kreisring auf ∂Q_i parallel ist. Ein *wesentlicher Torus* in Q_i ist inkompressibel und nicht parallel zu einem reinen Torus in ∂Q_i.

Hier sind die drei Typen:

1. *Einfache 3-Mannigfaltigkeiten*, die keine wesentlichen Tori und Kreisringe zulassen. Solche 3-Mannigfaltigkeiten sind angenehm, da genau Tori und Kreisringe Eulersche Charakteristik 0 haben und darum dem zweiten Endlichkeitssatz im Wege stehen. Es bleibt nur, mit unwesentlichen Tori und Kreisringen fertig zu werden. Aber diese können keine wesentliche Scherereí verursachen, da sie unwesentlich sind.

2. *Seifertsche 3-Mannigfaltigkeiten*, die aus Kreisen (Fasern) bestehen. Die Kreise müssen gut aneinander anliegen und lokal ein Standardbild darstellen, ähnlich zu den Strecken $\{*\} \times I$ in $D^2 \times I$. Das Randmuster jeder Seifertschen Kammer besteht aus Fasern.

3. *I-Bündel*, die durch Strecken gefasert sind. Der Rand von jedem I-Bündel besteht aus zwei Teilen: aus der *Basisfläche* und aus der *Seitenfläche*. Die Basisfläche ist eine Vereinigung von Endpunkten der Strecken, die Seitenfläche besteht aus den Kreisringen, die aus den Randfasern zusammengestellt sind. Das Randmuster von dem I-Bündel besteht aus parallelen Kopien der Mittelkreise, so daß jeder Seitenkreisring mindestens einen Musterkreis enthält.

Ein wesentlicher Kreisring $A \in \mathcal{K}$ in Q_i heißt *longitudinal* (oder *randgrob*), wenn der Rand jedes anderen Kreisrings $A_1 \in \mathcal{K}$ von ∂A durch eine Isotopie abgeschoben werden kann. Alle andere wesentliche Kreisringe heißen transversal.

Bemerkung. Seien A, A_1 Kreisringe, so daß A longitudinal ist und $A_1 \subset \mathcal{K}$. Nach der Eliminierung aller trivialen Kreise und Bögen in $A \cap A_1$ bekommen wir zwei Kreisringe, die sich nur längs der Mittelkreise schneiden. Falls A transversal

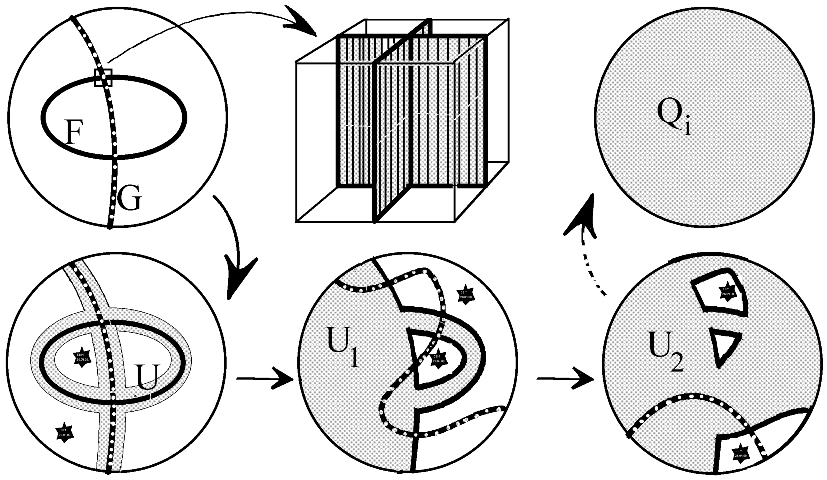

Figure 4: U läßt sich so zu Q_i erweitern, daß die Faserungsstruktur bleibt. Die Sterne zeigen die Außenteile, die von kompressiblen oder randparallelen Komponenten berandet sind

ist, gibt dieselbe Prozedur radiale Strecken in dem Durchschnitt. Das erklärt die gewählte Terminologie.

Satz 5.3. *Wenn Q_i einen wesentlichen Torus oder einen longitudinalen Kreisring F enthält, dann ist Q_i eine Seifertsche 3-Mannigfaltigkeit. Enthält Q_i einen transversalen Kreisring F, dann ist sie ein I-Bündel.*

Beweis. Da F nicht grob ist, gibt es einen Torus bzw. Kreisring G, der F nur längs nicht-trivialer Kreise oder Bögen schneidet. Dann besitzt $F \cup G$ eine natürliche Faserung in Kreise bzw. in Strecken. Es folgt, daß eine reguläre Umgebung $U \supset F \cup G$ eine ähnliche Faserung hat. Betrachten wir den *inneren Rand* $\partial_{int} U = \partial U \cap \mathrm{Int}\ Q_i$ von U. Er besteht aus Tori und Kreisringen. Wir erweitern U zu einer größeren gefaserten 3-Mannigfaltigkeit U_1, indem wir alle kompressiblen inneren Randkomponenten von U mit Vollkreisen $D^2 \times I$ bzw. Zylinder $D^2 \times I$ füllen, und auch die randparallelen Komponenten von U durch entsprechende Teile von ∂Q_i ersetzen. Der innere Rand von U_1 besteht nur aus inkompressiblen Tori und Kreisringen, die nicht grob sind. Das bedeutet, daß die Prozedur fortgesetzt werden kann. Nach dem ersten Endlichkeitssatz von Kneser und Haken ist die Prozedur endlich, und letzten Endes bekommen wir Q_i.

Folgerung. *Jede irreduzible randirreduzible 3-Mannigfaltigkeit enthält nur eine endliche Anzahl von wesentlichen Tori und longitudinalen Kreisringen (modulo Isotopien $(Q_i, \Gamma_i) \to (Q_i, \Gamma_i)$).*

Beweis. *Offensichtlich, da jede JSJ-Kammer diese Eigenschaft besitzt, dank der einfachen topologischen Structur der Seifertschen Faserräume und I-Bündel.*