Algorithmische Topologie

Lektion 9. Ein Algorithmus zur Erkennung der 3-Sphäre (Fortsetzung).

9.1 Aufschneiden längs 2-normaler Sphäre.

Seien ξ eine Henkelzerlegung einer 3-Mannigfaltigkeit M, und F eine 2-normale Fläche in M. Schneiden wir M längs F auf. Wir bekommen eine neue 3-Mannigfaltigkeit M_F. Da F jeden Henkel in Henkel von demselben Index aufschneidet, induziert ξ eine Henkelzerlegung ξ_F von M_F.

Lemma 9.1. $c(\xi_F) = c(\xi)$.

Beweis. Da F 2-normal ist, geht F nicht durch Balken mit Valenz < 2. Sei B ein Balken der Valenz $v(B) \geq 2$, der mittels k Streifen $F \cap B$ in $k+1$ Balken $B_i, 0 \leq i \leq k$ aufgeschniffen ist. Dann gilt:

1. $v(B) = \sum_0^k v(B_i) - 2k \Longrightarrow$
2. $v(B) - 2 = \sum_0^k (v(B_i) - 2)$, wobei $v(B_i) - 2 \geq 0$ sind $\Longrightarrow$
3. $c(B) = \sum_0^k c(B_i)$.

9.2. Aufschneiden und Durchlöchern.

Seien M ein Homologieball mit einer reduzierten Henkelzerlegng ξ und $S \subset M$ eine 2-normale Sphäre. Dann besteht M_S aus zwei Teilen: einem Homologieball M_1 und einer 3-Mannigfaltigkeit M_2, die zu $S^2 \times I$ homologisch äquivalent ist. Wir finden in M_2 eine Platte $P = D^2 \times I$, so daß $\partial D^2 \times \{0\}$ und $\partial D^2 \times \{1\}$ in verschiedenen Randkomponenten von M_2 liegen. Wenn wir P enfernen (d.h. M_2 durchlöchern), bekommen wir zwei Homologiebälle, die dann und nur dann echt sind, wenn M ein echter Ball ist. Nach der Reduzierung (9.2) bekommen wir eine endliche Menge von Homologiebällen $M_1', \ldots, M_n'$. Die so bekommene Henkelzerlegung von $\cup_i M_i'$ wird mit ξ' bezeichnet.

Satz 9.1.

1. *M ist ein echter Ball $\Longleftrightarrow$ alle M_i' sind echte Bälle*;
2. *$c(\xi') \leq c(\xi)$;*
3. *Nehmen wir an, daß S nicht randparallel ist (d. h. M_2 mindestens einen Balken der Valenz ≥ 3 enthält). Dann ist $c(\xi')$ kleiner, als $c(\xi)$.*

Beweis. Offensichtlich, da bei der Reduzierung mindestens ein Balken, der Valenz ≥ 3 in einen Balken von kleinerer Valenz verwandelt wird.

9.3. Rubinstein-Thompson Theorem und der Algorithmus.

Eine Henkelzerlegung heißt *nicht-trivial*, wenn sie aus mehr als einem Henkel besteht. Die triviale Zerlegung besteht aus einem Ball (keine Balken und Platten sind vorhanden).

Satz 9.2. *In jeder nicht-trivialen reduzierten Henkelzerlegung eines echten Balls gibt es eine nicht-randparallele 2-normale Sphäre.*