Algorithmische Topologie

Lektion 7. Die Lösung des Homöomorphieproblems für Mannigfaltigkeiten und Quasi-Mannigfaltigkeiten von Stallings.

7.1. Ein Resultat von G. Hemion.

Seien F eine orientierbare Fläche und $f: F \to F$ ein Homöomorphismus. Betrachten wir das Produkt $F \times [0,1]$ und identifizieren $F \times \{0\}$ und $F \times \{1\}$ durch f. Die resultierende 3-Mannigfaltigkeit $M_f = F \times [0,1]/\{(x,0) \approx (f(x),1)\}$ heißt *Stallingssche 3-Mannigfaltigkeit*. Es gibt eine natürliche Faserung $M_f \to S^1$, so daß alle Fasern zu F homöomorph sind. Sei $g: F \to F$ ein anderer Homöomorphismus.

Satz 7.1. *Stallingssche 3-Mannigfaltigkeiten M_f und M_g sind dann und nur dann fasertreu homöomorph, wenn f und g konjugiert sind (modulo Isotopie).*

Beweis. Offensichtlich, da zwei Homöomorphismen $h, h': F \to F$ dann und nur dann isotop sind, wenn es einen fasertreuen Homöomorphismus $H: F \times [0,1] \to F \times [0,1]$ gibt, so daß $H(x,0) = (h(x),0)$ und $H(x,1) = (h'(x),1)$.

Da die Gleichungen $g = hfh^{-1}$ und $g = (hf^n)f(hf^n)^{-1}$ äquivalent sind, erzeugt jeder Homöomorphismus $h: F \to F$, der f zu g konjugiert, die unendliche Menge hf^n von konjugierenden Homöomorphismen. Alle solchen Homöomorphismen heißen *äquivalent.*

Satz 7.2. (G. Hemion) *Für jedes f, g ist die Menge von Äquivalenzklassen endlich. Die Klassen lassen sich durch algorithmisch konstruierte Homöomorphismen repräsentieren.*

Daraus folgt, daß das Homöomorphieproblem für Stallingssche Mannigfaltigkeiten algorithmisch lösbar ist.

7.2. Vertikale Gerüste.

Definition. Ein abstraktes 2-dimensionales Polyeder P heißt *vertikal*, wenn das folgende gilt:

1. P enthält eine Menge $\{F_0, \ldots, F_{n-1}\}$ von disjunkten Flächen, die zu einer fixierten Fläche F homöomorph sind.

2. Die abgeschlossene Hülle jeder Komponente von $P \setminus \cup_i F_i$ ist das Produkt $G_i \times [0,1]$, wobei G_i ein Graph ist.

3. Die Graphen $G_i \times \{0\}$ und $G_{i-1} \times \{1\}$ liegen auf F_i, sind dort transversal und jeder Graph enthält ∂F_i und zerlegt F_i in Scheiben (Indizes werden modulo n genommen).

4. Die durch die Identität definierte Abbildung $G_i \times \{0\} \to G_i \times \{0\}$ läßt sich zu einem Homöomorphismus $F_i \to F_{i+1}$ erweitern.

Satz 7.3.

1. *Jedes vertikale Gerüst P läßt sich in eine Stallingssche 3-Mannigfaltigkeit M eingebettet, so daß $M \setminus P$ aus offenen Bällen besteht.*

2. *M ist durch P eindeutig bestimmt.*