Übungen zur Vorlesung Geometrie

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $t \in \mathbb{R}$ und $X := \{A, B, C, D\}$ erklären wir auf $X \times X$ die Funktion f mit $f(p, p) = 0, p \in X$, $f(p, q) = f(q, p), p, q \in X$, $f(p, q) = t, p, q \in \{A, B, C\}, p \neq q$ und $f(p, D) = 1, p \in \{A, B, C\}$. Für welche t ist f eine Distanzfunktion auf X? Sei t so, dass f eine Distanzfunktion ist. Für welche t lässt der metrische Raum (X, f) sich als Unterraum in einem Hilbertraum darstellen? Für welche t lässt der metrische Raum (X, f) sich als Unterraum in der hyperbolischen Ebene darstellen?

Aufgabe 2. Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ und mit Determinante$(A) > 0$. Sei $K := \{p \in \mathbb{R}^n \mid A(p) \in \mathbb{Z}^n \& 0 \leq x_i(p) < 1, i = 1, 2, \cdots, 1\}$. Zeige: $\#K =$ Determinante(A).

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Die ϵ-Umgebung einer Teilmenge A in X ist die Teilmenge $\mathrm{Tube}_\epsilon(A)$ aller Elemente $b \in X$ für die ein $a \in A$ mit $d(a, b) \leq \epsilon$ existiert. Für nichtleere Teilmengen A, B in X, die in X abgeschlossen sind, sei $t \in \mathbb{R}$ die kleinste reelle Zahl mit $A \subset \mathrm{Tube}_\epsilon(B)$ und mit $B \subset \mathrm{Tube}_\epsilon(A)$. Zeige, dass t tatsächlich existiert. Wir setzen $D_X(A, B) = t$. Zeige, dass D_X eine Distanzfunktion ist. Zeige, dass die Menge aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen in X, ausgestattet mit der Distanzfunktion D_X, ein kompakter Raum ist.

Aufgabe 4. Eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Untergruppen in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V endlicher Dimension heisst konvergent mit Grenzwert $G \subset V$ wenn für jedes $R \in \mathbb{R}, R \geq 1$, und jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, die Folge $(\mathrm{Tube}_\epsilon(G_n) \cap B_R)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Distanzfunktion D der Aufgabe 3 $\mathrm{Tube}_\epsilon(G) \cap B_R$ als Grenzwert hat. Hier hat $B_R := \{p \in \mid ||p||_V \leq R\}$, wobei $||?||_V$ eine Norm auf V ist, die Rolle des Raumes X der Aufgabe 3. Definiere auf der Menge G_V aller abgeschlossenen Untergruppen eine Topologie, die mit der hier erklärten Konvergenz von Folgen kompatibel ist. Zeige, dass der Raum G_V kompakt ist. Hinweis: Die gesuchte Topologie stammt von Claude Chabauty, siehe die Veröffentlichung:
`http : //www.numdam.org/item?id = BSMF_1950__78_143_0`,
Claude Chabauty, Limite d'ensembles et géométrie des nombres, Bull. SMF (1950), p. 143-151.

Aufgabe 5. Aus Aufgabe 4 lernen wir, dass die Menge H aller abgeschlossenen Untergruppen in R eine Topologie hat. Zeige, dass H homöomorph zu $[0, 1]$ ist.

Aufgabe 6. Bestimme den Raum G_V für $V = \mathtt{R}^2$. Hinweis: Beschreibe in G_V den Unterraum aller Gruppen $G \subset V$, wobei G ein Untervektorraum in V ist. Hinweis: Beschreibe in G_V den Unterraum aller Gruppen $G \subset V$, wobei G isomorph zu Z oder$\mathtt{Z}^2$ ist. Ibrahim Pourezza und John H. Hubbard haben gezeigt, dass G_V homöomorph zu S^4 ist, siehe www.math.cornell.edu/ hubbard/ClosedSubgroupsR2.pdf.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathtt{R}^2 \to \mathtt{R}$ eine stetige Funktion. Sei $A : \mathtt{R}^2 \to \mathtt{R}^2$ linear, orthogonal und mit $\det(A) = 1$. Für $p \in \mathtt{R}^2, h \in \mathtt{R}^2$ sei

$$M_A(f,h)(p) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(p + A^i(h))$$

Wir nehmen an, dass für alle p, h gilt

$$M_A(f,h)(p) = f(p)$$

Zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist. Hinweis: für $A = \mathrm{Id}_{\mathtt{R}^n}$ ist f konstant; für $A = -\mathrm{Id}_{\mathtt{R}^n}$ ist das Differential df konstant; für $A \neq \pm\mathrm{Id}_{\mathtt{R}^n}$ ist f harmonisch.

Aufgabe 8. Sei $f : \mathtt{R}^2 \to \mathtt{R}$ harmonisch und beschränkt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 9. Konstruiere auf $\mathtt{R} \times \mathtt{R}_{>0}$ eine nicht konstante, beschränkte harmonische Funktion.