Komplexe Zahlen

Norbert A'Campo

Gesucht sind reelle Vektorräume V endlicher Dimension mit einer Multiplikation $m_V : V \times V \to V$ sodass das Tripel $(V, +_V, m_V)$, wobei $+_V$ die Addition im Vektorraum V bezeichnet, die Körperaxiome erfüllt. Genauer, wollen wir, dass folgendes gilt:

- Die Multiplikation ist kommutativ: $m_V(u,v) = m_V(v,u),\ u,v \in V$,

- Die Multiplikation ist bilinear: $m_V(au' + bu'', v) = am_V(u',v) + bm_V(u'',v),\ a,b \in \mathbb{R},\ u',u'',v \in V$,

- es existiert ein Einheitselement $1_V \in V$, mit $m_V(1_V, v) = v,\ v \in V$,

- zu jedes $u \in V$ mit $u \neq 0$ existiert ein Inverses $v \in V$ mit $m_V(u,v) = 1_V$.

Wir kennen zwei Beispiele: $(\mathbb{R}, +, .)$ und $(\mathbb{C}, +, .)$. Folgender Satz sagt aus, dass dies schon die einzig möglichen sind.

Satz. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Multiplikation $m_V : V \times V \to V$, sodass folgendes erfüllt ist:*
- $m_V(u,v) = m_V(v,u),\ u,v \in V$,
- $m_V(au' + bu'', v) = am_V(u',v) + bm_V(u'',v),\ a,b \in \mathbb{R}, u',u'',v \in V$,
- *es existiert ein* $1_V \in V$, *mit* $m_V(1_V, v) = v,\ v \in V$,
- *zu jedes* $u \in V$ *mit* $u \neq 0$ *existiert ein* $v \in V$ *mit* $m_V(u,v) = 1_V$.

Dann gilt $\mathrm{Dim}(V) = 1$ *oder* $\mathrm{Dim}(V) = 2$. *Trifft* $\mathrm{Dim}(V) = 1$ *zu, dann ist der Körper* $(V, +, m_V)$ *eindeutig isomorph zum Körper der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. *Trifft* $\mathrm{Dim}(V) = 2$ *zu, dann ist der Körper* $(V, +, m_V)$ *isomorph zum Körper der komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Der Beweis gibt uns die Gelegenheit, Grundkenntnisse aus Algebra und Infinitesimalrechnen einzusetzen.

Wir machen Vorbereitungen:

1. Seien $(V, ||\,||_V)$ und $(W, ||\,||_W)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir nehmen an, dass V von endlicher Dimension ist. Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist L stetig.

Beweis. Wähle eine Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ für V. Seien $x_1, x_2, \cdots, x_n : V \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen zu dieser Basis. Dann ist $||u||_{\mathrm{Max}} := \mathrm{Maximum}_{1 \leq i \leq n} |x_i(u)|, u \in V$, eine Norm auf V. Da die Dimension von V endlich ist, gibt es eine Konstante $A \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $u \in V$ gilt:
$$||u||_{\mathrm{Max}} \leq A||u||_V$$

Sei $B := \text{Maximum}_{1\leq i\leq n}||L(e_i)||_W$. Für $u = x_1(u)e_1 + x_2(u)e_2 + \cdots + x_n(u)e_n$ gilt:

$$||L(u)||_W \leq nB||u||_{\text{Max}} \leq nAB||u||_V$$

Für ein $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, setzen wir $\delta := \frac{\epsilon}{bAB+1}$. Dann gilt für jedes $u \in V$ und für jedes v mit $||u - v||_V \leq \delta$ die Abschätzung $||L(u) - L(v)||_W \leq \epsilon$, womit wir die Stetigkeit von L an der Stelle u gezeigt haben. Da das vorgeschlagene δ nur von ϵ und nicht von u abhängt, ist sogar gezeigt, dass die Abbildung $L : V \to W$ gleichmässig stetig ist.

2. Seien $(V, ||\,||_V)$ und $(W, ||\,||_W)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Sei $\text{Hom}(V, W)$ der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von V nach W. Dann definiert

$$||L||_{\text{Hom}} := \text{Supremum}_{u\in V,||u||_V\leq 1}||L(u)||_W$$

eine Norm, die sogenannte Operator Norm, auf $\text{Hom}(V, W)$. Es gilt für $u \in V$ und $L \in \text{Hom}(V, W)$ die Abschätzung

$$||L(u)||_W \leq ||L||_{\text{Hom}}||u||_V$$

3. Sei $(V, ||\,||_V)$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $m_V : V \times V \to V$ eine getrennt lineare Abbildung. Getrennt linear, auch multi-linear oder wie hier bilinear (da nur zwei Argumente) heisst, dass für u fest die Zuordnung $v \mapsto m_V(u, v)$ und für v fest die Zuordnung $u \mapsto m_V(u, v)$ linear sind. Es existiert eine Konstante $\mu \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $u, v \in V$ gilt:

$$||m_V(u, v)||_V \leq \mu||u||_V||v||_V$$

Beweis. Die Abbildung $u \in V \mapsto M_u \in \text{Hom}(V, V).M_u(v) := m_V(u, v)$, ist linear, somit stetig da V endlich dimensional ist. Sei nun μ eine Konstante mit $||M_u||_{\text{Hom}} \leq \mu||u||_V$. Dann gilt für $u, v \in V$ die Abschätzung $||m_V(u, v)||_v = ||M_u(v)||_V \leq \mu||u||_v||v||_V$. Die schärfste Konstante wäre hier die Operatornorm von $M \in \text{Hom}(V, \text{Hom}(V, V))$.

4. Sei $(V, ||\,||_V)$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $m_V : V \times V \to V$ eine getrennt lineare Abbildung. Dann ist m_V differenzierbar. Wir wählen auf $V \times V$ eine Norm, zum Beispiel die Norm $||(u, v)||_{V\times V} := \text{Maximum}\{||u||_V, ||v||_V\}$. Dann die folgende Entwicklung eine Dreigliedentwicklung an der Stelle $(u, v) \in V \times V$ für m_V.

$$m_V(u + h, v + k) = m_V(u, v) + (m_V(u, k) + m_V(h, v)) + m_V(h, k)$$

Das dritte Glied ist quadratisch klein, d.h.

$$||m_V(h, k)||_V \leq \mu||h||_V||k||_V \leq \mu||(h, k)||^2_{V\times V},$$

somit auch relativ klein in $||(h, k)||_{V\times V}$. Das Differential $(Dm_V)_{(u,v)}$ von m_V an der Stelle (u, v) ist die lineare Abbildung

$$(h, k) \in V \times V \mapsto (Dm_V)_{(u,v)}(h, k) := m_V(u, k) + m_V(h, v)$$

5. Seien $(V, || \, ||_V)$ und $(W, || \, ||_W)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei $L : V \to W$ linear und stetig. Dann ist L differenzierbar. Die Dreigliedentwicklung lautet: $L(u + h) = L(u) + L(h) + 0$.

6. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\mathrm{Det} : \mathrm{Hom}(V, V) \to \mathbb{R}$ die Determinante. Die Abbildung Det ist differenzierbar. An der Stelle Id_V gilt die Dreigliedentwicklung

$$\mathrm{Det}(\mathrm{Id}_V + H) = \mathrm{Det}(\mathrm{Id}_V) + \mathrm{Spur}(H) + \mathrm{Rest}(H) = 1 + \mathrm{Spur}(H) + \mathrm{Rest}(H)$$

Ist auf V die Norm $|| \, ||_V$ gewählt, dann ist $\mathrm{Rest}(H)$ bezüglich der Operatornorm auf $\mathrm{Hom}(V, V)$ quadratisch klein. Es gilt:

$$(D\mathrm{Det})_{\mathrm{Id}_V} = \mathrm{Spur} : \mathrm{Hom}(V, V) \to \mathbb{R}$$

Sei $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ invertierbar. Dann berechnen wir das Differential der Determinante an der Stelle A wie folgt:

$$\mathrm{Det}(A + H) = \mathrm{Det}(A(\mathrm{Id}_V + (A^{-1}H)) =$$

$$\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(\mathrm{Id}_V + (A^{-1}H)) =$$

$$\mathrm{Det}(A)(\mathrm{Det}(\mathrm{Id} + \mathrm{Spur}(A^{-1}H) =$$

$$\mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(A)\mathrm{Spur}(A^{-1}H) + \mathrm{Det}(A)\mathrm{Rest}(A^{-1}H))$$

wobei Rest() das Restglied des Differentials der Funktion Det an der Stelle Id_V ist.

7. Übung. Für $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit $\mathrm{Rang}(A) < \mathrm{Dim}(V) - 1$ gilt $(D\mathrm{Det})_A = 0$.

8. Übung. Für $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ zeige, dass eindeutig ein $A^* \in \mathrm{Hom}(V, V)$ exist derart, dass $(D\mathrm{Det})_A(H) = \mathrm{Spur}(A^*H), H \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gilt.

9. Sei $(V, || \, ||_V)$ ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $\mathrm{Dim}(V) > 1$. Dann ist $\mathrm{SL}(V) := \{A \in \mathrm{Hom}(V, V) \mid \mathrm{Det}(A) = 1\}$ in $\mathrm{Hom}(V, V)$ abgeschlossen und nicht beschränkt.

10. Übung. Finde in $\mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene und nicht beschränkte Teilmenge X derart, dass $0 \notin X$ und dass für jedes $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$, genau ein $r \in \mathbb{R}, r > 0$, mit $ru \in X$ existiert.

Beweis des Satzes. Wir möchten ausschliessen, dass $\mathrm{Dim}(V) > 2$ gilt. Dazu die Annahme $\mathrm{Dim}(V) > 2$, die wir zu einem Widerspruch führen werden.
Vorerst wählen wir eine Euklidische Norm $|| \, ||$ auf V.

Wir betrachten die Teilmenge $\Sigma := \{u \in | \ \mathrm{Det}(M_u) = 1\}$. Die Teilmenge Σ ist abgeschlossen in V, da die Zusammengesetzte Funktion $u \in V \mapsto M_u \in \mathrm{Hom}(V, V) \mapsto \mathrm{Det}(M_u) \in \mathbb{R}$ stetig ist. Die Funktion $u \in V \mapsto \mathrm{Det}(M_u) \in \mathbb{R}$ ist auf $V \setminus \{0\}$ strikt positiv.

Da für $u \in V \setminus \{0\}$ ein Isomorphismus ist, gilt $\mathrm{Det}(M_u) \neq 0$. Da $V \setminus \{0\}$ Wegzusammenhängend ist und $\mathrm{Det}(M_{1_V}) = 1 > 0$ gilt, folgt $\mathrm{Det}(M_u) > 0$. Genauer, ist $u \in V$ linear unabhängig von 1_V, dann ist der Weg $\gamma : [0,1] \to V, \gamma(t) := (1-t)1_V + tu$, ganz in $V \setminus \{0\}$ und somit das Vorzeichen von $\mathrm{Det}(M_{\gamma(t)}$ konstant. Es folgt $\mathrm{Det}(M_u) > 0$. Ist $u \in V$ linear abhängig von 1_V, dann wählen wir vorerst ein $v \in V$, dass linear unabhängig von 1_V ist. Der Kantenzug $\gamma : [0,2] \to V, \gamma(t) = (1-t)1_V + tv$ für $t \leq 1$ und $\gamma(t) = tv + (t-1)u$ verbindet in $V \setminus \{0\}$ 1_V und u. Wir schliessen widerum $\mathrm{Det}(M_u) > 0$. Bemerkt sei, dass um ein solches v wählen zu können wir nur $\mathrm{Dim}(V) > 1$ verwendet haben.

Für jedes $u \in V, u \neq 0$, gilt $ru \in \Sigma$, wobei wir $r = \mathrm{Det}(M_u)^{\frac{1}{\mathrm{Dim}(V)}}$ setzen. Wir zeigen mit einem Widerspruchsbeweis, dass Σ in V beschränkt ist (vergl. mit Vorbereitung 10.). Dazu die Annahme, dass Σ nicht beschränkt ist. Es gäbe dann eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n \in \Sigma$ und $||u_n||_V > n$. Wir setzen $v_n := \frac{u_n}{||u_n||_V}$. Es gilt $||v_n||_V = 1$ und $\mathrm{Det}(M_{v_n}) < \frac{1}{n^{\mathrm{Dim}(V)}}$. Da die Folge in V beschr"ankt ist, hat sie eine konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $v \in V$. Es gilt $||v||_V = 1$, somit gilt $v \neq 0$. Es gilt $\mathrm{Det}(M_v) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Det}(M_{v_n}) = 0$. Also wäre $v \neq 0$ und in V für die Multiplikation m_V nicht invertierbar! Widerspruch.

Die Menge $S_V := \{u \in V \mid ||u||_V = 1\}$ ist eine Sph"are. In Poolkoordinaten $(r,\theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times S_V \mapsto r\theta \in V \setminus \{0\}$ kann man sich Σ vorstellen als Graph der differenzierbaren Funktion $\theta \in S_V \subset V \mapsto r = \mathrm{Det}(M_\theta)^{\frac{-1}{\mathrm{Dim}(V)}}$.

Wir wählen ein $I \in V$ mit $\mathrm{Spur}(I) = 0$ und $I \neq 0$. Dieses ist möglich, da $\mathrm{Dim}(V) > 1$ zutrifft. Wir strecken I mit einem Faktor $r \in \mathbb{R}, r > 0$, derart, dass weiter $\mathrm{Det}(I) = 1$ gilt. Sei V^* der Vektorraum aller Linearformen auf V. Auf $V \setminus \{0\}$ ist die Zuordnung ω

$$u \in V \setminus \{0\} \mapsto \omega_u \in V^*, h \in V \mapsto \omega_u(h) := \mathrm{Det}(M_u)\mathrm{Spur}(M_I^{-1}M_u^{-1}M_h) \in \mathbb{R}$$

eine 1-Differentialform auf $V \setminus \{0\}$.

Diese Form ω hat viele Eigenschaften:

i. ω hat lokal um 1_V eine Stammfunktion,

ii. ω ist invariant,

iii. die Einschränkung von ω auf Σ_V hat keine Nullstellen,

iv. die Einschränkung von ω auf Σ_V hat eine Stammfunktion.

Die Eigenschaften iii. und iv. führen zum gesuchten Widerspruch.

Zu i. Wir konstruiern lokal um 1_V eine Stammfunktion für ω. Sei $b^V(1_v, 1/2)$ die Menge aller $u \in V$ derart, dass die Operatornorm von $M_{1_V} - M_u$ strikt kleiner $1/2$ ist. Auf $b^V(1_v, 1/2)$ erklären wir mit

$$u = 1 - v \in b^V(1_v, 1/2) \mapsto \lambda(u) := \mathrm{Spur}(M_I^{-1}\log(M_{1_V} - M_v)) = \mathrm{Spur}(M_I^{-1}\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{M_v^n}{n}) \in \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion λ. Auf $b^V(1_v, 1/2)$ gilt $d\lambda = \omega$, also hat ω lokal um 1_V eine Stammfunktion. In der Berechnung des Differentials der Funktion λ wird die Kommutativität der Multiplikation m_V benutzt. Das Differential einer Abbildung wie $u \in V \mapsto f(u) := \mathrm{Spur}(M_u^3) \in \mathbb{R}$ wird mit der Dreigliedentwicklung

$$f(u+h) =$$

$$f(u) + \mathrm{Spur}(M_h M_u M_u + M_u M_h M_u + M_u M_u M_h) + \mathrm{Rest}_u(h) =$$

$$f(u) + 3\mathrm{Spur}(M_u^2 M_h) + \mathrm{Rest}_u(h)$$

berechnet, wobei

$$\mathrm{Rest}_u(h) = \mathrm{Spur}(M^h M^h M_u + M_h M_u M_h + M_u M_h M_h + M_h M_h M_h)$$

ist. Für $A, B \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$, auch wenn A und B nicht kommutieren. Das Differential einer Abbildung wie $u \in V \mapsto g(u) := \mathrm{Spur}(M_I M_u^3) \in \mathbb{R}$ wird mit der Dreigliedentwicklung

$$g(u+h) =$$

$$g(u) + \mathrm{Spur}(M_I(M_h M_u M_u + M_u M_h M_u + M_u M_u M_h)) +$$

$$\mathrm{Spur}(M_I(M^h M^h M_u + M_h M_u M_h + M_u M_h M_h + M_h M_h M_h))$$

berechnet und die Vereinfachung

$$\mathrm{Spur}(M_I(M_h M_u M_u + M_u M_h M_u + M_u M_u M_h)) = 3\mathrm{Spur}(M_I M_u^2 M_h)$$

ist nur zulässig bei einer kommutativen Multiplicatiom m_V . Ohne diese Vereinfachung lässt sich $d\lambda = \omega$ nicht nachweisen.

Zu ii. Für $v \in V, v \neq 0$, gilt: $M_v^* \omega = \omega$. Tatsächlich, für $u \in V \setminus \{0\}$ und $h \in V$ gilt

$$(M_v^* \omega)_u(h) := \omega_{M_v(u)}(M_v(h)) = \mathrm{Spur}(M_I^{-1} M_{vu}^{-1} M_{M_v(h)}) =$$

$$\mathrm{Spur}(M_I^{-1} M_u^{-1} M_h) = \omega_u(h)$$

Zu iii. Es gilt $\omega_{1_V}(I) = \mathrm{Spur}(M_I^{-1} M_{1_V}(I)) = \mathrm{Spur}(M_{1_V}) = \mathrm{Dim}(V) \neq 0$. Da I an der Stelle 1_V ein Tangentialvektor an Σ_V ist, ist die Einschränkung von ω auf Σ_V an der Stelle 1_V nicht null. Aus ii. folgt, dass die Einschränkung von ω auf Σ_V für jedes $u \in \Sigma_V$ an der Stelle u nicht null ist.

Zu iv. Wegen ii. hat ω lokal um jedes $u \in V \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion. Σ_V ist so wie S_V einfach zusammenhängend. Es folgt, dass ω auf ganz Σ_V eine Stammfunktion λ hat.

Zum Widerspruch. Auf Σ_V hat die stetige Funktion λ an einer Stelle $a \in \Sigma_V$ ein Maximum. Aus $(D\lambda)_a = \omega_a$ folgt, dass ω an der Stelle a verschwindet, im Widerspruch mit iii.!

Es bleiben nur die Möglichkeiten $\mathrm{Dim}(V) = 1$ oder $\mathrm{Dim}(V) = 2$. Gilt $\mathrm{Dim}(V) = 1$, dann ist der Körper $(V, +_V, m_V)$ isomorph zum Körper $\mathbb{R}$ und zwar eindeutig, da der Körper $\mathbb{R}$ keine nicht triviale Automorphism hat. Gilt $\mathrm{Dim}(V) = 2$, dan bilden 1_V und I eine Vektorraumbasis vom V. Die $2x2$ Matrix M vom M_I bezüglich der Basis $1_V, I$ hat die Form

$$[0, a; 1, b]$$

Aus $\mathrm{Det}(M) = 1$ folgt $a = -1$ und aus $\mathrm{Spur}(M) = 0$ folgt $b = 0$. Somit gilt $M_I M_I = -M_{1_V}$ oder $I^2 = -1$. Nun folgt, dass der Körper $(V, +_V, m_V)$ isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ ist. Der Satz ist nun bewiesen.

Eine wichtige Folgerung ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra.

Satz. Sei $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ein Polynom mit complexen coefficienten. Sei $n > 0$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{C}$ mit $P(r) = 0$.

Beweis. Widerspruchsannahme: Sei $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ eim Polynome mit minimalem $n > 0$ derart, dass für alle $r \in \mathbb{C}$ gilt $P(r) \neq 0$. Es gilt $n > 1$ da alle lineare Polynome Nullstellen haben. Das Polynom $P(z)$ lässt sich wegen der Minimalität von n nicht faktorizieren in $P(z) = P_1(z)P_2(z)$, wobei $P_1 = z^{n_1} + b_1 z^{n_1 - 1} + \cdots + b_{n_1}, 1 \leq n_1 < n$, und $P_2 = z^{n_1} + c_1 z^{n_2 - 1} + \cdots + c_{n_2}, 1 \leq n_2 < n$, sind. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}[z]/(P(z))$ trägt eine Multiplikation m_V derart, dass $(V, +V, m_V)$ ein Körper ist. Seine reelle Dimension ist $2n$. Dieses ist nicht möglich da $2n > 2$ gilt.