Übungen zur Vorlesung Optimierung und Geometrie I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei K eine zweimal stetig differenzierbare einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^n$. Sei K_ϵ die Menge aller Punkte $p \in \mathbb{R}^n$ mit $\text{Infimum}_{q\in K}||p - q||_{\text{Euklidisch}} \leq \epsilon$. Zeige die Existenz von $r \in \mathbb{R}, r > 0$, derart dass für alle $p \in K_r$ das Infimum $\text{Infimum}_{q\in K}||p - q||_{\text{Euklidisch}}$ für genau ein $p \in K$ angenommen wird.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Zeige für $0 \leq \epsilon \leq r$, dass die Funktion $\epsilon \mapsto \text{Volume}(K_\epsilon)$ linear in ϵ^{n-1} ist.

Aufgabe 3. Sei $X := [0,1] \times [0,1]$ mit Euklidischer Distanz. Sei K der Raum aller aller abgeschlossenen Teilmengen in X. Die Topologie auf K sei mit der Hausdorff Distanz erklärt. Sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert k in K. Wir nehmen an, dass jedes k_n zusammenhängend ist. Ist dann k zusammenhängend? Wir nehmen an, dass jedes k_n wegzusammenhängend ist. Ist dann k wegzusammenhängend?

Aufgabe 4. Sei $G \subset K$ die Menge aller Graphen von stetigen Abbildungen $f : [0,1] \to [0,1]$. Bestimme den Abschluss in K von G.